LEZIONE 4 | FLUSSI BIDIMENDIONALI 7/11/2024

SISTEMI LINEARI (cap. 5 del libro)

Studiamo innanzitutto i SISTEMI LINEARI (in 2 dimensioni) perché giocano un ruolo importante nella CLASSIFICAZIONE DEI PUNTI FISSI dei SISTEMI NON LINEARI.

$$\dot{x} = ax + by \qquad \dot{y} = cx + dy \quad , \quad \dot{\underline{x}} = A\underline{x} \quad , \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad e \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Il sistema è detto LINEARE nel senso che se $\underline{x}_1$ e $\underline{x}_2$ sono soluzioni allora qualsiasi combinazione lineare di esse $c_1 \underline{x}_1 + c_2 \underline{x}_2$ è soluzione.

NOTA. $\dot{\underline{x}} = 0$ quando $\underline{x} = 0$, quindi $\underline{x}^* = 0$ è sempre un punto fisso $\forall A$.

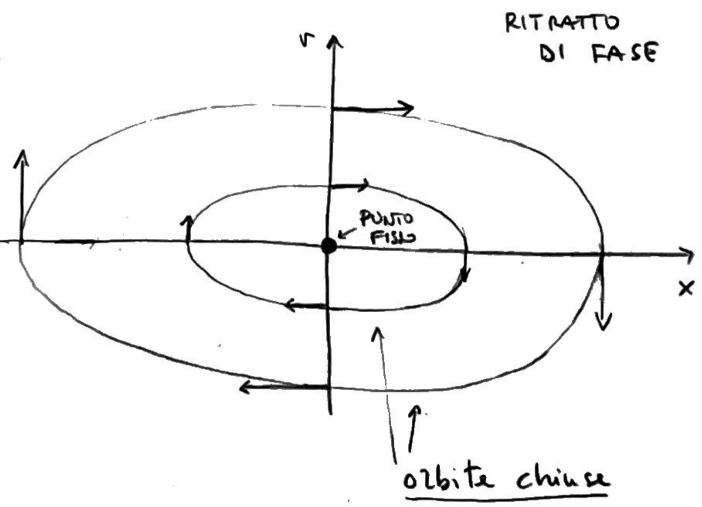
Le soluzioni del sistema possono essere visualizzate come traiettorie nel piano (x, y), che chiamiamo PIANO DI FASE (o DELLE FASI)

ES $m\ddot{x} + kx = 0$ può essere risolto analiticamente (i sistemi lineari sono speciali in questo senso) ma ci esercitiamo su di esso in termini di piano di fase.

Lo stato del sistema è determinato da $(x, \dot{x}) = (x, v)$. Quindi lo riscriviamo

$$\dot{x} = v \qquad \dot{v} = -\frac{k}{m}x = -\omega^2 x$$

Questo sistema assegna un vettore $(\dot{x}, \dot{v}) = (v, -\omega^2 x)$ ad ogni punto (x, v), quindi rappresenta un campo vettoriale nel piano di fase.



Anche qui, e più utilmente che nel caso monodimensionale, visualizziamo il campo vettoriale come il moto di un fluido immaginario

Piazziamo una particella immaginaria in (x_0, v_0) e vediamo come è trascinata dal flusso.

Le orbite chiuse sono ellissi date dall'equazione $\omega^2 x^2 + v^2 = C$, $C \geq 0$ risultato equivalente alla conservazione dell'energia

$$\frac{k}{m}x^2 + v^2 = C \, , \quad \frac{k}{2}x^2 + \frac{m}{2}v^2 = C' \quad \checkmark$$

ES. Risolviamo il sistema lineare $\dot{\underline{x}} = A\underline{x}$ con $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ e disegnamo il ritratto di fase

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{array}{l} \dot{x} = ax \\ \dot{y} = -y \end{array}$$

equazioni <u>disaccoppiate</u>

$$\Rightarrow \quad x(t) = x_0 e^{at} \quad \rightarrow \text{ esponenziale dipendente dal valore di } a$$

$$y(t) = y_0 e^{-t} \quad \rightarrow \text{ decadimento esponenziale}$$

$\boxed{a = 0}$ <u>GRAF. 1</u>

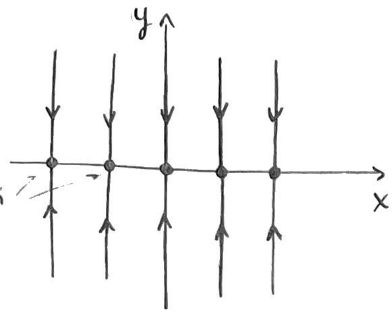
$x(t) = x_0$

$y(t) = y_0 e^{-t}$

$\dot{x} = 0$

$\dot{y} = -y$

punti fissi



LINEA DI PUNTI FISSI su x

$\boxed{a = -1}$ <u>GRAF. 2</u>

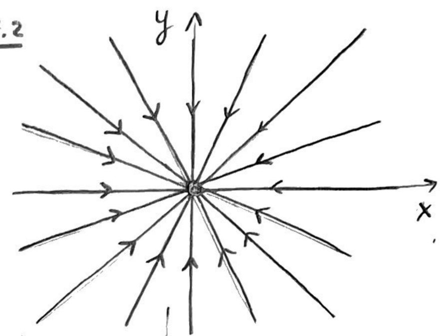
$x(t) = x_0 e^{-t}$

$y(t) = y_0 e^{-t}$

$\dot{x} = -x$

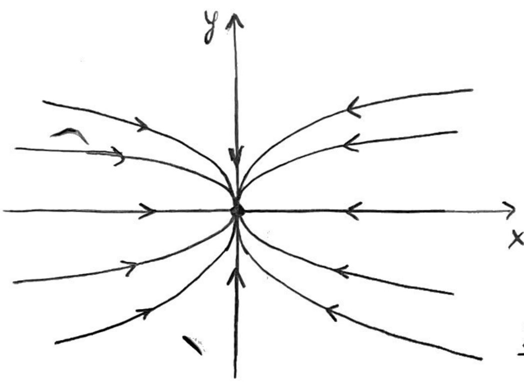
$\dot{y} = -y$

$y = \frac{y_0}{x_0} x$



$\underline{x}^* = (0,0)$ è una STELLA o un NODO SIMMETRICO

$\boxed{a < -1}$ <u>GRAF. 3</u>



pendenza $\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = -\frac{1}{a} \frac{y(t)}{x(t)} = -\frac{1}{a} \frac{y_0 e^{-t}}{x_0 e^{at}} = -\frac{1}{a} \frac{y_0}{x_0} e^{-(1+a)t}$

$$\lim_{\substack{t \to +\infty \\ a < -1}} \frac{dy}{dx} = \infty$$

$$\lim_{\substack{t \to -\infty \\ a < -1}} \frac{dy}{dx} = 0$$

le traiettorie si avvicinano all'origine tangenzialmente alla direzione "lenta" y

$\underline{x}^* = (0,0)$ è un NODO STABILE

NOTA Equazione cartesiana delle traiettorie

$$\frac{x}{x_0} = e^{at} \; ; \; \frac{1}{a} \ln\left(\frac{x}{x_0}\right) = t \quad \longrightarrow \quad y = y_0 e^{-\frac{1}{a} \ln\left(\frac{x}{x_0}\right)} = y_0 e^{\ln\left(\frac{x}{x_0}\right)^{-1/a}} = y_0 \left(\frac{x}{x_0}\right)^{-1/a} \checkmark$$

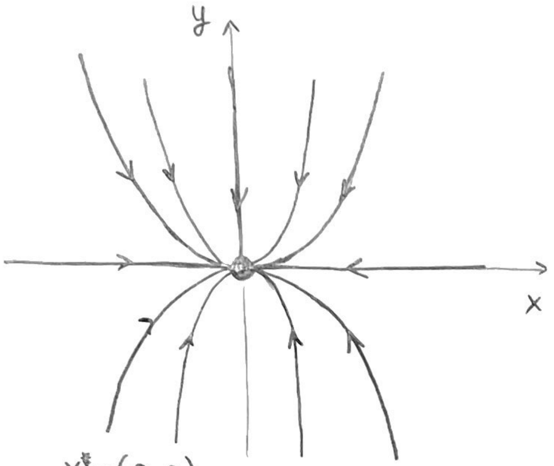
x e x_0 hanno sempre lo stesso segno per come è posto il problema

per $a = -1$ $\quad y = \frac{y_0}{x_0} x$

...

ESERCIZIO PER CASA:
continuare sviluppando più casi possibili.

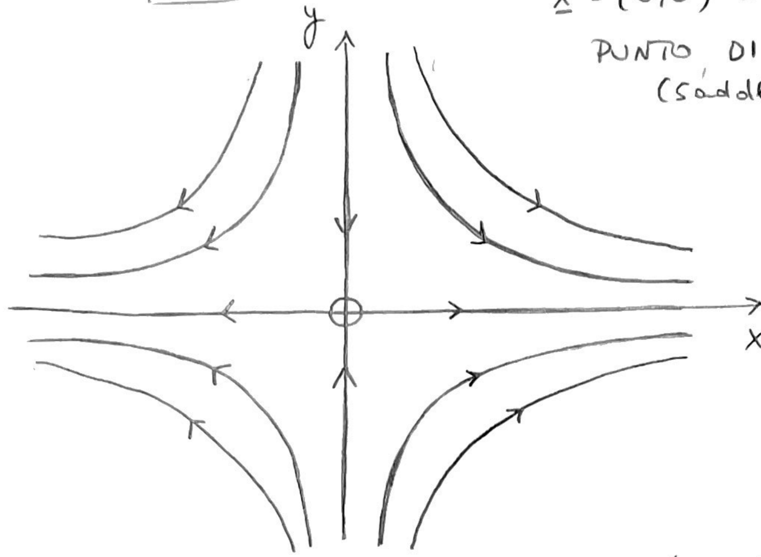
$\boxed{-1 < a < 0}$ GRAF. 4



$\underline{x}^* = (0,0)$
NODO STABILE

$\boxed{a > 0}$ GRAF. 5

$\underline{x}^* = (0,0)$ è un PUNTO DI SELLA (saddle point)



equazione cartesiana $\quad y = y_0 \left|\frac{x}{x_0}\right|^{-\frac{1}{a}} = y_0 \sqrt[a]{\left|\frac{x_0}{x}\right|}$

$\lim_{x \to +\infty} y(x) = 0 \quad , \quad \lim_{x \to 0^+} y(x) = +\infty$

l'asse y è una VARIETÀ STABILE del punto di sella x^*
$\{\underline{x}_0 \,/\, \underline{x}(t) \to \underline{x}^* \text{ per } t \to \infty\}$

l'asse x è una VARIETÀ INSTABILE del punto di sella x^*

$\{\underline{x}_0 \,/\, \underline{x}(t) \to \underline{x}^* \text{ per } t \to -\infty\}$

NOMENCLATURA

- $\underline{x}^* = \underline{0}$ è un PUNTO FISSO GLOBALMENTE ATTRATTIVO per $-\infty < a < 0$ (GRAF. 2, 3, 4)
  → perché attrae TUTTE le traiettorie, cioè $\underline{x}(t) \to \underline{x}^*$ per $t \to \infty$

- $\underline{x}^* = \underline{0}$ è STABILE SECONDO LYAPUNOV se tutte le traiettorie che iniziano vicino $\underline{x}^*$ restano vicino $\underline{x}^*$ $\forall t$. $\quad -\infty < a \leq 0$ (GRAF. 1, 2, 3, 4)

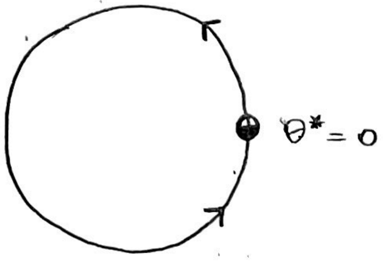
- Quando un punto è stabile secondo Lyapunov ma non attrattivo ($\underline{x}^* = \underline{0}$ in GRAF. 1) è detto NEUTRALMENTE STABILE.

  ALTRO ES. $\underline{x}^* = (0,0)$ per l'oscillatore armonico semplice.

<u>NOTA.</u> In meccanica la stabilità neutrale s'incontra spesso per sistemi senza attrito.

<u>OSS.</u> Un punto fisso può essere attrattivo ma non stabile secondo Lyapunov. Nessuna delle due nozioni di stabilità implica l'altra.

ES. $\dot{\theta} = 1 - \cos\theta$



$\theta^* = 0$ è ATTRATTIVO perchè attrae tutte le traiettorie per $t \to \infty$, ma non stabile secondo Lyapunov perchè partendo vicino θ^* ci si può allontanare parecchio prima di ritornarvi.

Tuttavia nella maggior parte dei casi i due tipi di stabilità coesistono.

- Quando un punto fisso è attrattivo e stabile secondo Lyapunov si dice STABILE (o ASINTOTICAMENTE STABILE)

- Quando un punto fisso non è attrattivo nè stabile secondo Lyapunov si dice INSTABILE ($\underline{x}^* = \underline{0}$ in GRAF. 5)

CLASSIFICAZIONE DEI SISTEMI LINEARI

Studiamo il caso di una matrice A generale.

Nell'esempio precedente notiamo come gli assi x e y abbiano giocato un ruolo geometricamente importante, poiché di fatto hanno determinato la direzione delle traiettorie per $t \to \pm \infty$.

Inoltre gli assi contenevano delle traiettorie rettilinee "speciali", nel senso che una traiettoria che cominciasse su uno degli assi resterebbe su di esso esibendo una crescita (o decrescita) esponenziale semplice.

Vogliamo cercare l'analogo di queste traiettorie rettilinee ma per il caso generale, per cui cerchiamo traiettorie della forma:

$$\underline{x}(t) = e^{\lambda t} \underline{v} \quad , \quad \text{con } \underline{v} \neq \underline{0} \text{ da determinare}$$

λ tasso di crescita, da determinare.

se una soluzione di questo tipo esiste, essa corrisponde a un moto esponenziale lungo la retta in direzione di $\underline{v}$.

Procediamo:

$$\dot{\underline{x}} = A \underline{x} \quad ; \quad \lambda \cancel{e^{\lambda t}} \underline{v} = \cancel{e^{\lambda t}} A \underline{v} \quad ; \quad A \underline{v} = \lambda \underline{v}$$

che ci dice che le soluzioni rettilinee esistono se $\underline{v}$ è un autovettore di A con autovalore corrispondente λ.

$$\det (A - \lambda I) = 0 \quad \text{equazione caratteristica} \quad , \quad \text{con } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix} = (a-\lambda)(d-\lambda) - bc = \lambda^2 - \tau \lambda + \Delta = 0$$

dove $\tau = \operatorname{tr} A = a + d$

$\Delta = \det A = ad - bc$

$$\Rightarrow \quad \lambda_1 = \frac{\tau + \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2} \quad , \quad \lambda_2 = \frac{\tau - \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2}$$

Se $\lambda_1 \neq \lambda_2$ allora $\underline{v_1}$ e $\underline{v_2}$ sono linearmente indipendenti e generano l'intero piano, cioè ogni condizione iniziale può essere scritta come

$$\underline{x_0} = c_1 \underline{v_1} + c_2 \underline{v_2}$$

A questo punto possiamo scrivere la soluzione generale

$$\underline{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \underline{v_1} + c_2 e^{\lambda_2 t} \underline{v_2}$$

che è generale perché è una combinazione lineare di soluzioni di $\underline{\dot{x}} = A\,\underline{x}$ (quindi essa stessa soluzione), inoltre soddisfa le condizione iniziale $\underline{x}(0) = \underline{x_0}$ e quindi è la soluzione unica per il teorema di esistenza e unicità.

<u>ES.</u> Ritratto di fase di
$$\begin{cases} \dot{x} = x + y \\ \dot{y} = 4x - 2y \end{cases}$$
con condizioni iniziale $(x_0, y_0) = (2, -3)$

Il sistema si può risolvere ottenendo
$$x(t) = e^{2t} + e^{-3t}$$
$$y(t) = e^{2t} - 4e^{-3t}$$
ma questo non è necessario per disegnare il ritratto di fase.

Invece calcoliamo gli autovalori. $\tau = tr\,A = -1$, $\Delta = -6$

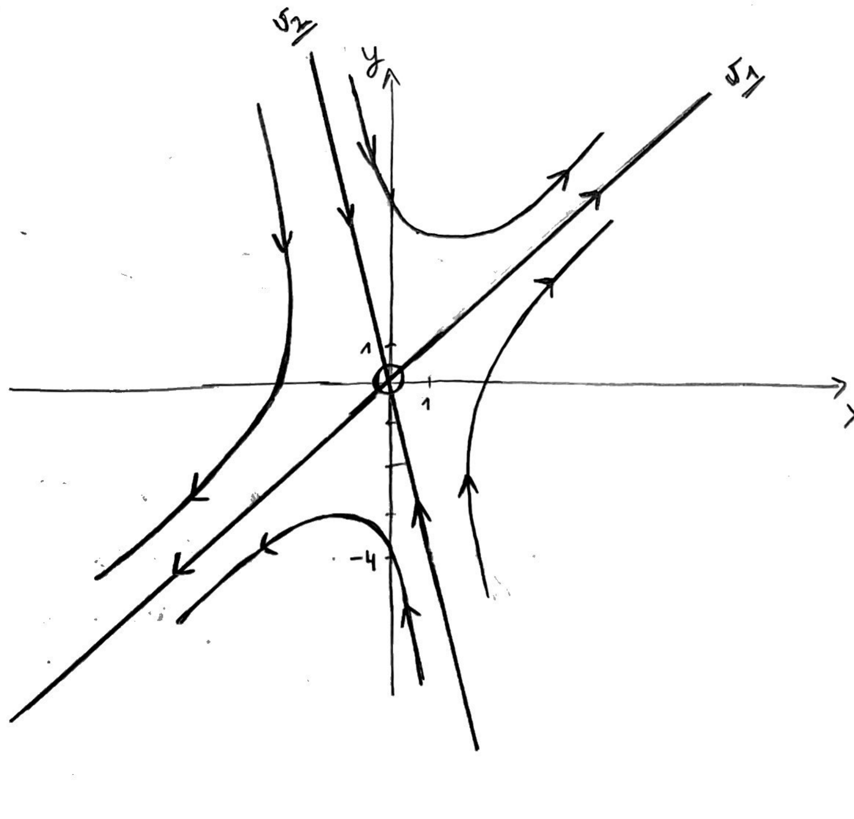
$\Rightarrow \quad \lambda^2 + \lambda - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 2, \; \lambda_2 = -3$

Questi ci dicono che la prima autosoluzione cresce esponenzialmente, mentre la seconda decresce esponenzialmente. $\Rightarrow$ l'origine è un <u>PUNTO DI SELLA</u>.

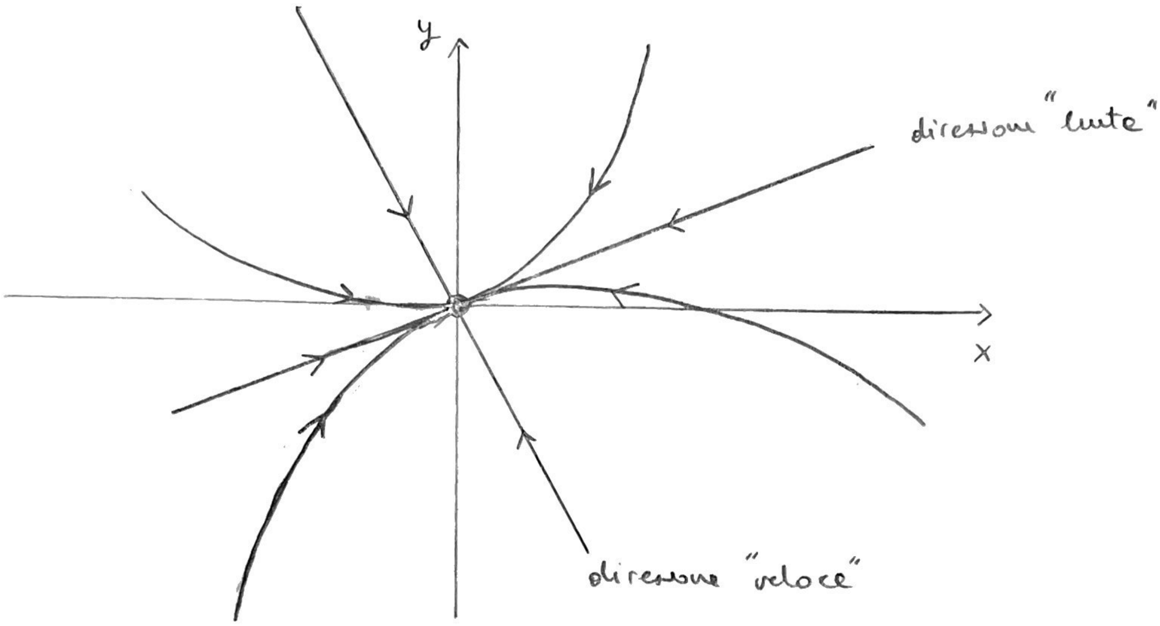
Calcoliamo gli autovettori $\underline{v_1} = (1, 1)$, $\underline{v_2} = (1, -4)$

genera una varietà instabile

genera una varietà stabile



ES. Disegniamo un ritratto di fase tipico per $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$.
Le due soluzioni decadono esponenzialmente, per cui il punto fisso è un nodo stabile.
Da un esempio precedente ci ricordiamo che le traiettorie tipicamente si avvicinano all'origine tangenzialmente alla direzione "lenta", quella corrispondente al più piccolo $|\lambda|$. In questo caso $\underline{v}_1$.
Per $t \to -\infty$, invece, le traiettorie diventano parallele alla direzione "veloce".



OSS. Per $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ o invertendo la direzione delle frecce avremmo un nodo instabile.

- CASO DEGLI AUTOVALORI COMPLESSI

$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left(\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}\right)$ complessi se $\tau^2 - 4\Delta < 0$

riscriviamoli come $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\omega$, con $\alpha = \frac{\tau}{2}$, $\omega = \frac{1}{2}\sqrt{4\Delta - \tau^2}$

Assumiamo $\omega \neq 0$, ovviamente, per avere autovalori distinti.

La soluzione si può scrivere:

$$\underline{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \underline{v_1} + c_2 e^{\lambda_2 t} \underline{v_2}$$

con $c_1, c_2, \underline{v_1}, \underline{v_2}$ complessi

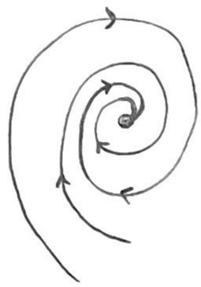
$\Rightarrow$ $\underline{x}(t)$ è data da combinazioni lineari di $e^{(\alpha \pm i\omega)t}$.

Dalla formula di Eulero $e^{i\omega t} = \cos\omega t + i \sin \omega t$, quindi

$\underline{x}(t)$ è data da combinazione di termini del tipo $e^{\alpha t}\cos\omega t$ e $e^{\alpha t}\sin\omega t$

Se $\alpha = Re(\lambda) < 0$ il termine rappresenta oscillazioni che decadono esponenzialmente. Se $\alpha = Re(\lambda) > 0$ il termine rappresenta oscillazioni che crescono esponenzialmente.

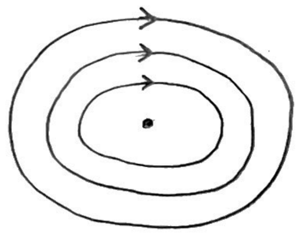
I punti fissi corrispondenti sono rispettivamente SPIRALI STABILI o INSTABILI.



SPIRALE STABILE

SPIRALE INSTABILE

Se $\alpha = 0$ (autovalori immaginari), le soluzioni sono periodiche con periodo $T = 2\pi/\omega$. Il punto fisso corrispondente è un CENTRO.



come nel caso dell'oscillatore armonico.

- CASO DI DUE AUTOVALORI UGUALI $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$

Due possibilità: 1) Ci sono due autovettori indipendenti corrispondenti a λ
2) C'è un solo autovettore

1) $\underline{x_0} = c_1 \underline{v_1} + c_2 \underline{v_2}$, $A\underline{x_0} = A(c_1 \underline{v_1} + c_2 \underline{v_2}) = c_1 \lambda \underline{v_1} + c_2 \lambda \underline{v_2} = \lambda \underline{x_0}$

$\Rightarrow$ ogni vettore del piano è autovettore con autovalore λ.

Poiché moltiplicare per A non fa che "dilatare" qualsiasi vettore di un fattore λ,

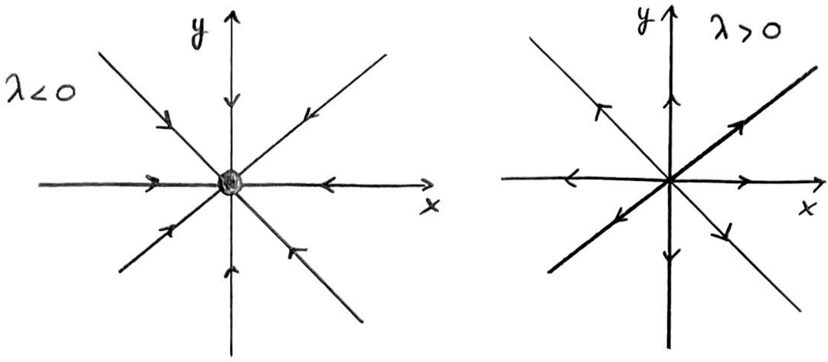
$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Quindi se $\lambda \neq 0$ tutte le traiettorie sono rette che passano per l'origine

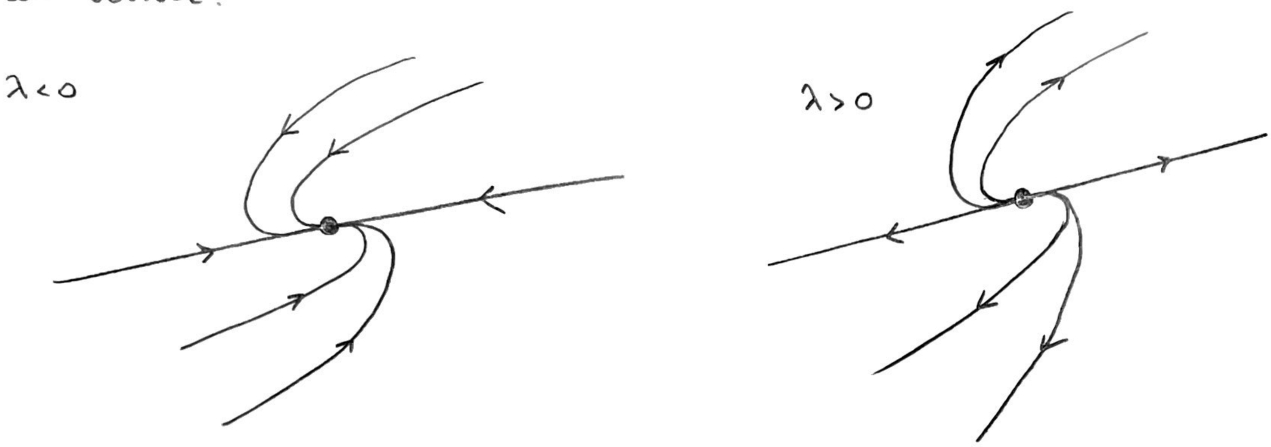
$$\underline{x}(t) = e^{\lambda t} \underline{x_0}$$

e il punto fisso

è un NODO A STELLA.



2) In questo caso il punto fisso è un NODO DEGENERE.
Per $t \to \pm\infty$ tutte le traiettorie diventano parallele all'unico autovettore.



Un NODO DEGENERE si può immaginare come ottenuto deformando un nodo ordinario, oppure come caso alla frontiera tra una spirale e un nodo.

Disegno grafico di classificazione dei punti fissi nel piano (τ, Δ).

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left(\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}\right), \quad \Delta = \lambda_1 \lambda_2, \quad \tau = \lambda_1 + \lambda_2$$

poiché l'equazione caratteristica $\lambda^2 - \tau\lambda + \Delta = 0$

si può scrivere $(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = 0$

- $\Delta < 0$, autovalori reali e di segno opposto, PUNTO DI SELLA.
- $\Delta > 0$: - autovalori reali con stesso segno, $\tau^2 - 4\Delta > 0$,

  esterno della parabola, NODI STABILI ($\tau < 0$) e INSTABILI ($\tau > 0$).

  - autovalori complessi coniugati, $\tau^2 - 4\Delta < 0$,

  interno della parabola, SPIRALI STABILI ($\tau < 0$) e INSTABILI ($\tau > 0$), CENTRI ($\tau = 0$).

  - autovalori coincidenti, $\tau^2 - 4\Delta = 0$,

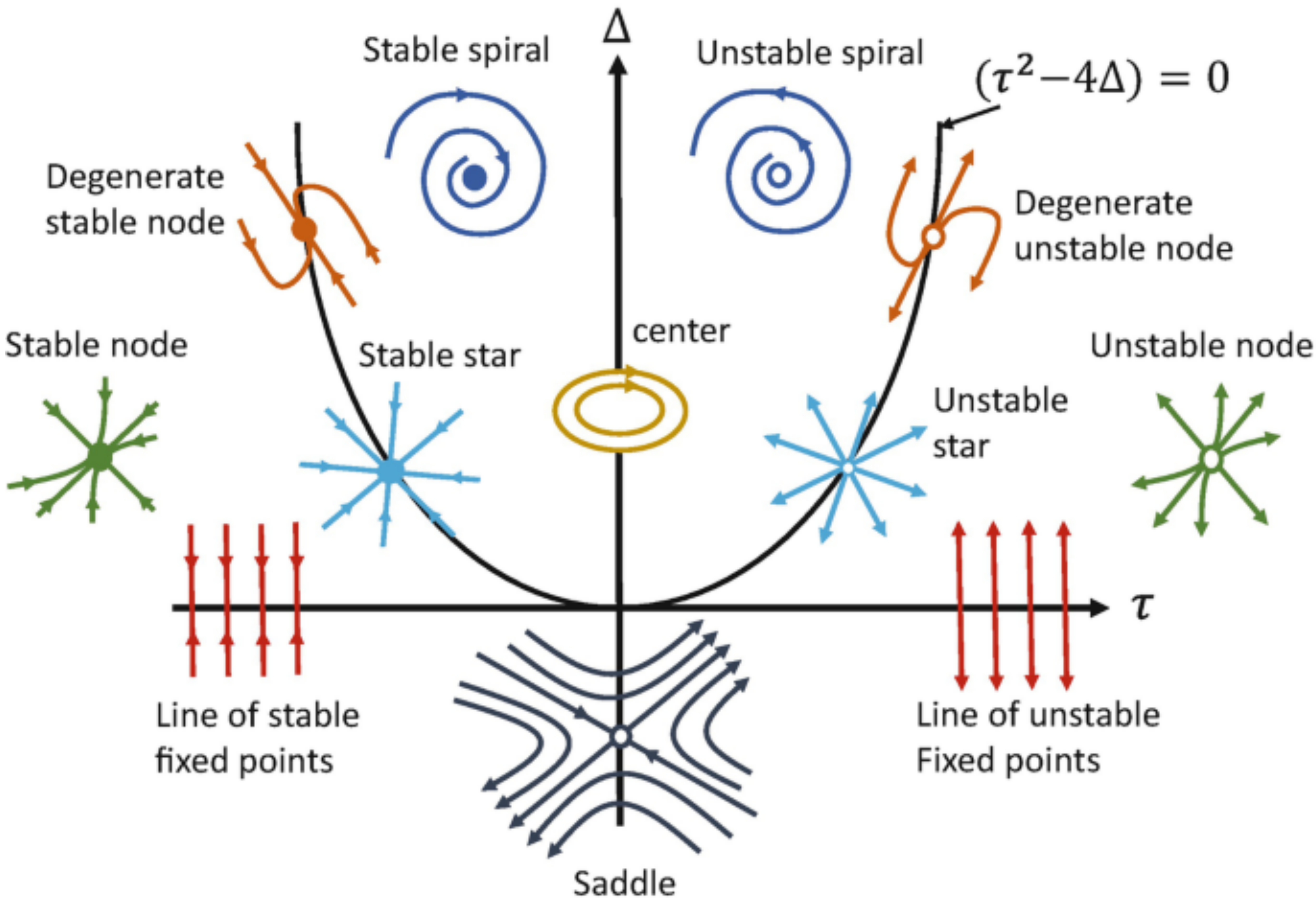
  sulla parabola, NODI A STELLA e NODI DEGENERI.

- $\Delta = 0$, almeno un autovalore è zero, l'origine non è un punto fisso isolato e si hanno una linea di punti fissi o un piano di punti fissi (quando $A = 0$).

<u>OSS.</u> Tra i casi di frontiera, i CENTRI sono certamente i più importanti poiché si trovano comunemente nei sistemi meccanici senza attrito, in cui l'energia si conserva.

ESERCIZIO PER CASA

Verificare e convincersi delle affermazioni contenute in questa pagina.



Da “An Introduction to Dynamical Systems Theory”, in “Thermoacoustic Instability” di R. I. Sujith and Samadhan A. Pawar, Springer 2021.