LEZIONE 5

IL PIANO DELLE FASI
(cap. 6 del libro)

22/11/2024

SISTEMI NON LINEARI BIDIMENSIONALI

Qui tratteremo soprattutto i punti fissi.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2) \end{aligned} \longrightarrow \quad \dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}) \quad \text{con} \quad \begin{aligned} &\underline{x} = (x_1, x_2) \\ &\underline{f}(\underline{x}) = \left(f_1(\underline{x}), f_2(\underline{x})\right) \end{aligned}$$

$\underline{x}$ rappresenta un punto nel piano delle fasi e $\dot{\underline{x}}$ la sua velocità.

NOTE. - L'intero piano è riempito di traiettorie, poiché ogni punto può essere preso come condizione iniziale.

- Per un sistema non lineare nella maggior parte dei casi non c'è speranza di trovare una soluzione analitica. Anche quando si arrivasse a una formula esplicita, spesso sarebbe troppo complicata per fare delle deduzioni fisiche a partire da essa.

- Invece possiamo disegnare il RITRATTO DI FASE del sistema a partire da $\underline{f}(\underline{x})$.

Le caratteristiche principali di un RITRATTO DI FASE sono:

(diapositive con figura 6.1.2 del libro)

1. I punti fissi (A, B, C in figura), che soddisfano l'equazione $\underline{f}(x^*) = \underline{0}$ e che corrispondono agli stati stazionari o di equilibrio del sistema.

2. Le orbite chiuse (D in figura), che corrispondono a soluzioni periodiche.

3. La disposizione delle traiettorie intorno ai punti fissi. Per esempio intorno ad A e C la disposizione è simile, ma molto diversa rispetto all'intorno di B.

4. La stabilità o l'instabilità dei punti fissi o delle orbite chiuse. In figura, A, B e C sono instabili mentre l'orbita chiusa D è stabile.

RITRATTO DI FASE

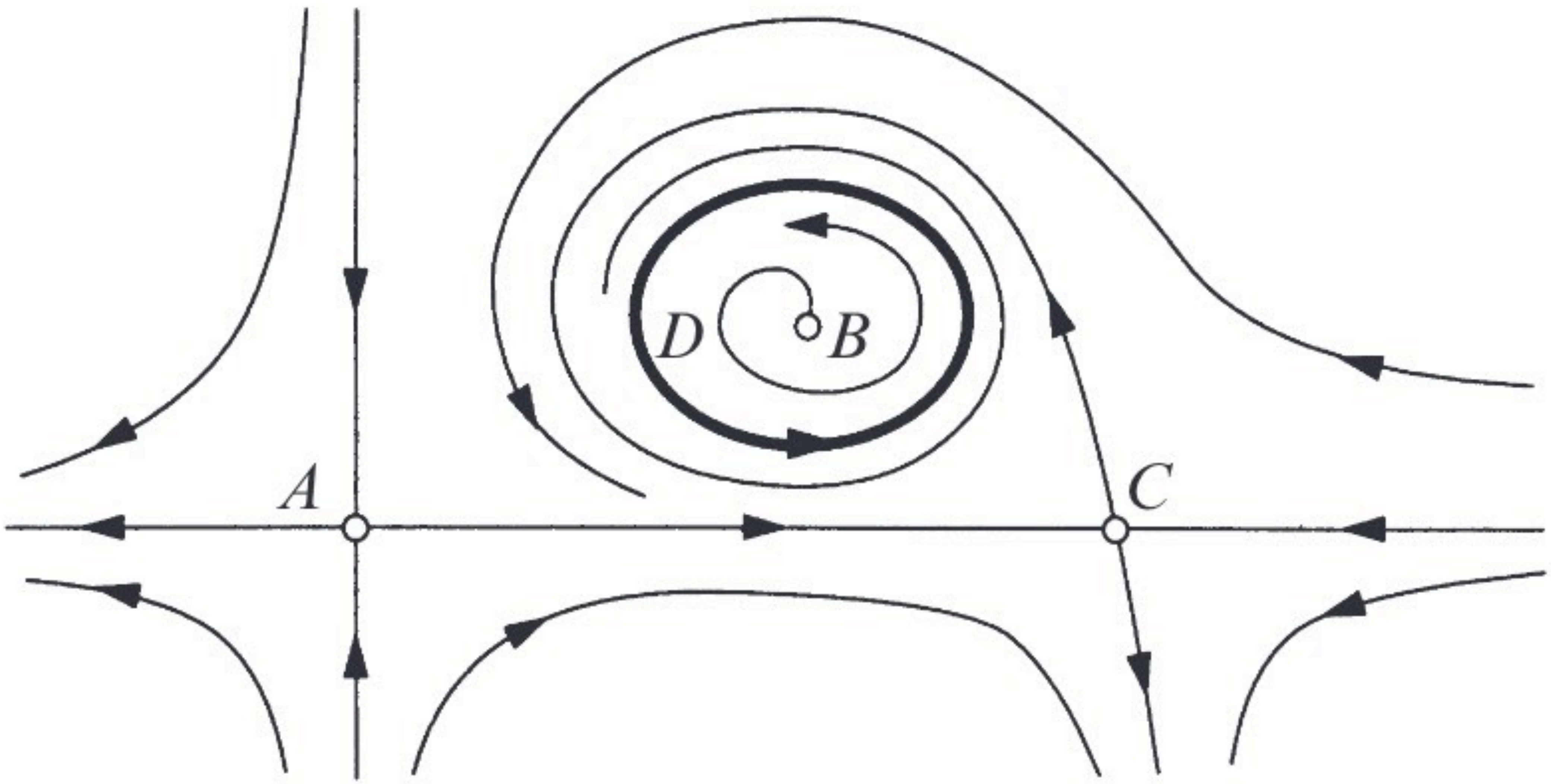


Immagine da S. H. Strogatz, Nonlinear Dynamics and Chaos, CRC Press.

INTEGRAZIONE NUMERICA

L'integrazione numerica di $\underline{\dot{x}} = \underline{f}(\underline{x})$ non è molto più complicata di quella di $\dot{x} = f(x)$

Usando il metodo di Runge-Kutta in forma vettoriale

$$\underline{x}_{n+1} = \underline{x}_n + \frac{1}{6}\left(\underline{k}_1 + 2\underline{k}_2 + 2\underline{k}_3 + \underline{k}_4\right)$$

con
$$\underline{k}_1 = \underline{f}(\underline{x}_n)\Delta t$$
$$\underline{k}_2 = \underline{f}\left(\underline{x}_n + \tfrac{1}{2}\underline{k}_1\right)\Delta t$$
$$\underline{k}_3 = \underline{f}\left(\underline{x}_n + \tfrac{1}{2}\underline{k}_2\right)\Delta t$$
$$\underline{k}_4 = \underline{f}\left(\underline{x}_n + \underline{k}_3\right)\Delta t$$

non riportato a lezione

$\Delta t = 0.1$ solitamente garantisce un'accuratezza sufficiente.

Nel produrre i grafici è utile disegnare il campo di direzione con piccoli segmenti che indicano la direzione locale del flusso.

ES. Per arrivare al campo di direzione in figura.

$$\begin{cases}\dot{x} = x + e^{-y} \\ \dot{y} = -y\end{cases}, \quad \text{PUNTI FISSI per cui } \begin{cases}\dot{x} = 0 \\ \dot{y} = 0\end{cases}, \quad \begin{cases}x + e^{-y} = 0 \\ y = 0\end{cases} \Rightarrow \underline{x}^* = (-1, 0)$$

Determiniamone la stabilità.

$$y = y_0 e^{-t}, \quad \lim_{t\to+\infty} y(t) = 0 \quad \underset{t\to+\infty}{\Rightarrow} \quad \dot{x} \approx x + 1 \Rightarrow \frac{dx}{x+1} \approx dt;$$

$$\ln|x+1| \approx t + c; \quad x + 1 = e^{t+c}; \quad x = A e^{t} - 1$$

crescita esponenziale

$$\text{se } x(0) = x_0, \quad x_0 = A - 1, \quad A = x_0 + 1$$
$$\Rightarrow x(t) = (x_0 + 1)e^{t} - 1$$

La crescita esponenziale di $x(t)$ suggerisce che il punto fisso sia instabile.

Infatti se sostituiamo $y_0 = 0$ otteniamo

$$\begin{cases}x(t) = (x_0 + 1)e^{t} - 1 \\ y(t) = 0\end{cases}$$

quindi $\underline{x}^*$ è effettivamente instabile.

instabilità sull'asse x.

CAMPO DI DIREZIONE

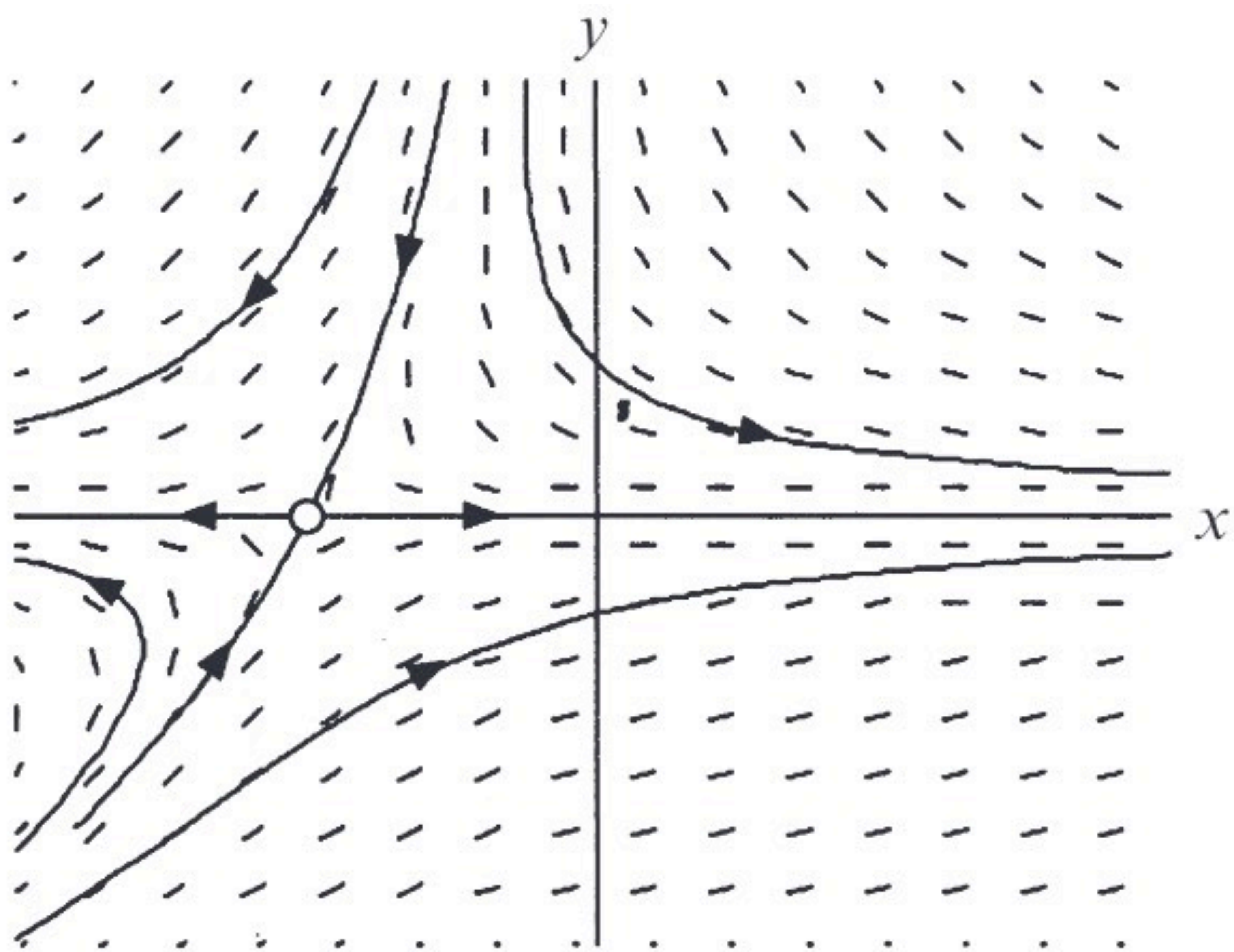


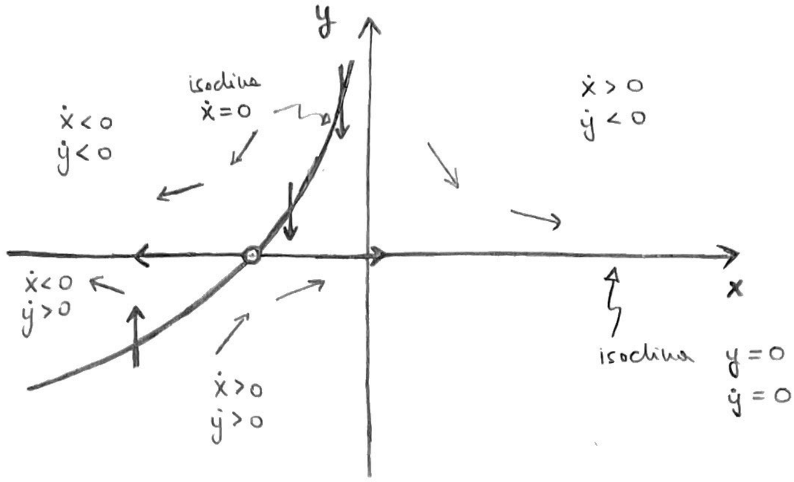
Immagine da S. H. Strogatz, Nonlinear Dynamics and Chaos, CRC Press.

In generale per i ritratti di fase può aiutare disegnare le isocline in cui $\dot{x}=0$ o $\dot{y}=0$, che contengono i punti in cui il flusso è puramente orizzontale o verticale.

Nel nostro caso il flusso è orizzontale $(\dot{y}=0)$ quando $y=0$, quindi sull'asse x. Invece è verticale $(\dot{x}=0)$ quando $x=-e^{-y}$; $\ln|-x|=-y$;

$y = \ln(-x)$
con $x<0$
passa per $\underline{x}^* = (-1,0)$

Su $y=0$,
$\dot{x}>0$ quando $x>-1$
$\dot{x}<0$ quando $x<-1$



Quando $y>0$, $\dot{y}<0$
$y<0$, $\dot{y}>0$

OSS. Le isocline non sono necessariamente traiettorie!

$\rightarrow$ campo di direzione in diapositive (fig. 6.1.4 del libro)

- ESISTENZA, UNICITÀ e CONSEGUENZE TOPOLOGICHE

In realtà, in generale, non siamo nemmeno sicuri che il sistema $\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x})$ abbia una soluzione.

Teorema di esistenza e unicità

Dato il problema a valori iniziali $\begin{cases} \dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}) \\ \underline{x}(0) = \underline{x}_0 \end{cases}$, supponiamo che $\underline{f}$ sia continua e lo siano tutte le sue derivate parziali $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $i,j = 1,\dots,n$ per $\underline{x}$ in un insieme aperto connesso $D \subset \mathbb{R}^n$ ($\underline{f}$ continuamente differenziabile).

Allora per $\underline{x}_0 \in D$, il problema a valori iniziali ha una soluzione $\underline{x}(t)$ su qualche intervallo di tempo $(-\tau, \tau)$ intorno a $t=0$, e questa soluzione è unica.

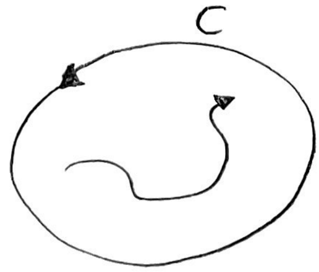
—

D'ora in poi supporremo che le nostre $\underline{f}$ siano continuamente differenziabili.

Corollario

Traiettorie diverse non s'intersecano mai.
Se si intersecassero ci sarebbero due soluzioni che partono dallo stesso (il punto d'intersezione) e questo violerebbe l'unicità.

Negli spazi di fase bidimensionali ci sono conseguenze topologiche speciali.
Per esempio, in presenza di un'orbita chiusa, ogni traiettoria che inizia al suo interno resta al suo interno.



E quindi?

Il teorema di Poincaré-Bendixson ci dice che, in 2 dimensioni, se una traiettoria è confinata in una regione del piano e non ci sono punti fissi all'interno allora la traiettoria a un certo punto si avvicinerà all'orbita chiusa.

PUNTI FISSI E LINEARIZZAZIONE

La linearizzazione serve ad approssimare il ritratto di fase del sistema non lineare a quello di un sistema lineare.

Sia

$$\dot{x} = f(x,y) \qquad \dot{y} = g(x,y)$$

con (x^*, y^*) un punto fisso, cioè

$$f(x^*,y^*)=0 \qquad g(x^*,y^*)=0$$

Siano $u = x - x^*$, $v = y - y^*$ componenti di una piccola perturbazione dal punto fisso.

Per sapere se la perturbazione cresce o decresce, dobbiamo ricavare delle equazioni differenziali per u e v.

$$\dot{u} = \dot{x}$$

$$= f(x^*+u, y^*+v) = f(x^*,y^*) + u\frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{(x^*,y^*)} + v\frac{\partial f}{\partial y}\bigg|_{(x^*,y^*)} + \mathcal{O}(u^2,v^2,uv) \; ;$$

$$\dot{u} = u\frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{(x^*,y^*)} + v\frac{\partial f}{\partial y}\bigg|_{(x^*,y^*)} + \underbrace{\mathcal{O}(u^2,v^2,uv)}_{\text{poiché } u,v \text{ sono piccoli, i termini quadratici saranno molto piccoli}}$$

Analogamente,

$$\dot{v} = u\frac{\partial g}{\partial x}\bigg|_{(x^*,y^*)} + v\frac{\partial g}{\partial y}\bigg|_{(x^*,y^*)} + \mathcal{O}(u^2,v^2,uv)$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix}\dot{u}\\ \dot{v}\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y}\\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y}\end{pmatrix}_{(x^*,y^*)}}_{\text{Jacobiano}}\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}}_{\text{SISTEMA LINEARE}} + \text{termini quadratici}$$

SISTEMA LINEARE che possiamo analizzare con i metodi discussi nella lezione precedente

Domanda: quando possiamo tranquillamente trascurare i termini quadratici?

Se il sistema lineare prevede una sella, un nodo o una spirale, allora il punto fisso del sistema non lineare sarà realmente una sella, un nodo o una spirale.
I casi limite, cioè centri, nodi degeneri, stelle o punti fissi non isolati, sono più difficili da trattare.

<u>Esempio</u>

Troviamo i punti fissi del sistema

$$\dot{x} = -x + x^3$$
$$\dot{y} = -2y$$

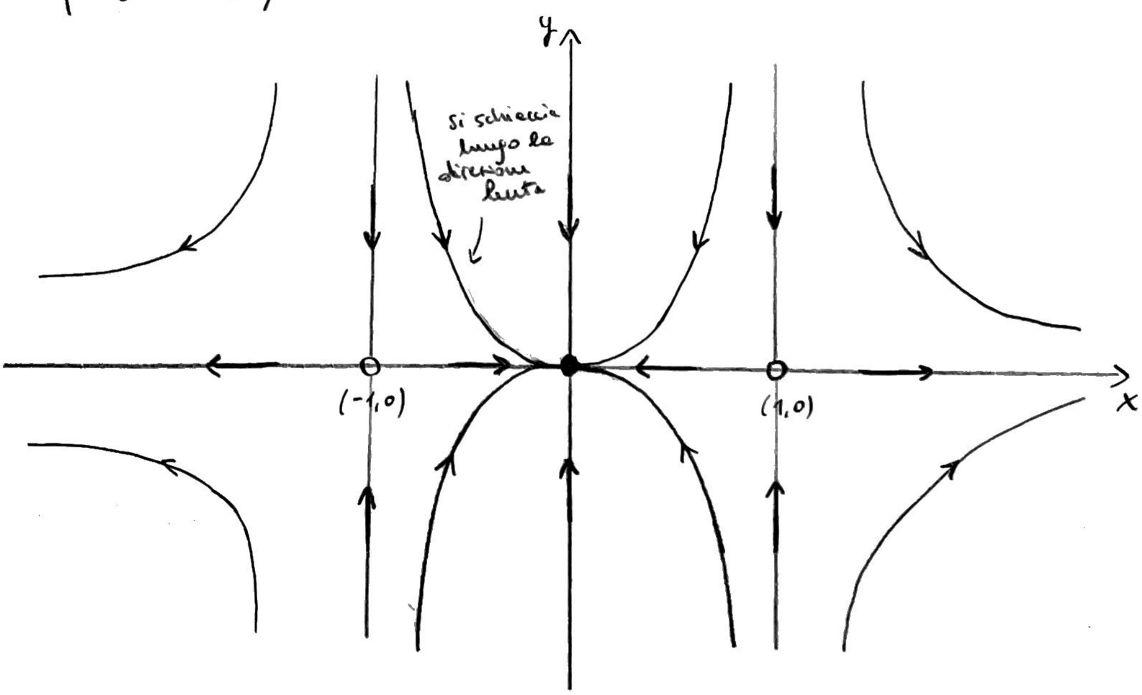
$$x(x^2-1) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad (0,0)\ ;\ (1,0)\ ;\ (-1,0)$$
$$y = 0$$

La matrice Jacobiana

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+3x^2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A_{(0,0)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \Delta = 2 \quad \tau = -3 \qquad \text{NODO STABILE}$$

$$A_{(1,0)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \Delta = -4 \quad \tau = 0 \qquad \text{SELLA, come anche } (-1,0)$$



E' un sistema disaccoppiato.

Nella direzione y c'è sempre un decadimento esponenziale verso $y=0$.

Le linee verticali sono INVARIANTI, poiché isocline con $\dot{x}=0$.

Infine, il ritratto di fase deve essere simmetrico rispetto all'origine poiché le equazioni sono invarianti per $x \mapsto -x$, $y \mapsto -y$.

ESEMPIO

$$\dot{x} = -y + ax(x^2+y^2)$$
$$\dot{y} = x + ay(x^2+y^2)$$

Consideriamo il punto fisso $(0,0)$.

OSSERVAZIONE. Per qualsiasi sistema con un punto fisso nell'origine, x e y rappresentano esse stesse delle perturbazioni dal punto fisso, poiché $u = x - x^* = x$, $v = y - y^* = y$, quindi la linearizzazione si semplifica omettendo semplicemente i termini non lineari del sistema:

$$\Rightarrow \quad \begin{cases}\dot{x} = -y \\ \dot{y} = x\end{cases} \quad \Rightarrow \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix}\Delta = +1 \\ \tau = 0\end{matrix} \qquad \text{CENTRO}$$

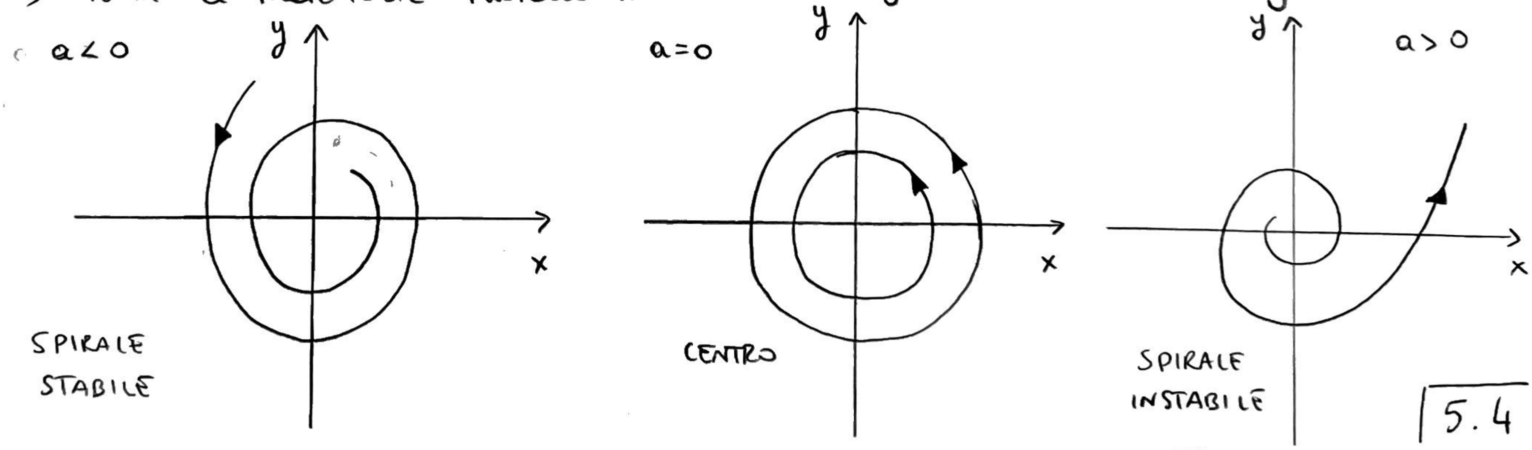
Ora analizziamo il sistema non lineare passando alle coordinate polari $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$. $\quad x^2+y^2=r^2 \Rightarrow x\dot{x}+y\dot{y} = r\dot{r} \Rightarrow \dot{r} = ar^3$

sostituendo

Inoltre $\dot{\theta} = \dfrac{x\dot{y}-y\dot{x}}{r^2} = 1$

non svolto qui — sostituendo

$\Rightarrow$ Tutte le traiettorie ruotano attorno all'origine con velocità angolare $\dot{\theta}=1$.



In questo caso l'analisi lineare ha dato un risultato sbagliato: la predizione del centro non era affidabile in generale ma solo per $a = 0$.

OSS. STELLE e NODI DEGENERI possono essere alterati da piccole non linearità, ma la loro stabilità non cambia.
Ad esempio, una stella instabile può diventare una spirale instabile o un nodo instabile.

Se siamo interessati alla sola stabilità e non alle traiettorie allora i punti fissi si possono classificare più grossolanamente come segue:

CASI "SOLIDI" (punti fissi iperbolici)

SORGENTI (repulsori): entrambe gli autovalori hanno parti reali positive $Re(\lambda_1) > 0$, $Re(\lambda_2) > 0$

POZZI (attrattori): entrambe gli autovalori hanno parti reali negative $Re(\lambda_1) < 0$, $Re(\lambda_2) < 0$

SELLE: un autovalore è negativo e uno è positivo
$\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$

CASI "MARGINALI" (punti fissi non-iperbolici)

CENTRI: entrambe gli autovalori sono immaginari $Re(\lambda_1) = 0$, $Re(\lambda_2) = 0$

PUNTI FISSI DI ORDINE SUPERIORE o NON-ISOLATI: $\lambda_1 = 0$ vel $\lambda_2 = 0$

In generale, i casi marginali sono quelli per cui per almeno un autovalore $Re(\lambda) = 0$.

Se $Re(\lambda_1) \neq 0$ e $Re(\lambda_2) \neq 0$ il punto fisso si dice anche IPERBOLICO.

Per i sistemi monodimensionali avevamo visto che la stabilità di un punto fisso era predetta accuratamente dalla linearizzazione se $f'(x^*) \neq 0$.
$Re(\lambda) \neq 0$ è l'analogo bidimensionale di quella condizione.

Questa idea si generalizza a sistemi n-dimensionali, in cui un punto fisso è iperbolico se $Re(\lambda_i) \neq 0$ per $i = 1, \dots, n$

TEOREMA DI HARTMAN-GROBMAN
Il ritratto di fase vicino ad un punto fisso iperbolico è TOPOLOGICAMENTE EQUIVALENTE al ritratto di fase della linearizzazione.

"Topologicamente equivalente" significa che c'è un omeomorfismo che mappa un ritratto di fase locale sull'altro: le traiettorie si possono piegare e deformare, ma non tagliare/strappare.
Ad esempio: i centri restano centri e traiettorie che collegano punti di sella non devono essere rotte.

DEFINIZIONE: STABILITÀ STRUTTURALE
Un ritratto di fase si dice strutturalmente stabile se la sua topologia non può essere cambiata da una perturbazione arbitrariamente piccola del campo vettoriale.

Ad esempio, se c'è un centro, il ritratto di fase non è strutturalmente stabile.

SISTEMI CONSERVATIVI

$m\ddot{x} = F(x)$ con F che <u>non</u> dipende da $\dot{x}$ e t.

$F(x) = -\dfrac{dV}{dx}$, $E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x)$ è costante nel tempo

In generale, dato un sistema $\underline{\dot{x}} = \underline{f}(\underline{x})$ una QUANTITÀ CONSERVATA (o COSTANTE DEL MOTO o INTEGRALE PRIMO) è una funzione continua a valori reali $E(\underline{x})$ costante sulle traiettorie, cioè $\dfrac{dE}{dt} = 0$, con E non costante su tutti gli insiemi aperti (per evitare casi banali).

<u>Esercizio</u> (per casa): mostrare che un sistema conservativo non può avere punti fissi attrattivi.

Che tipo di punti fissi si possono avere?

<u>Esempio</u> massa con $m = 1$ in un potenziale a doppia valle $V(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4$

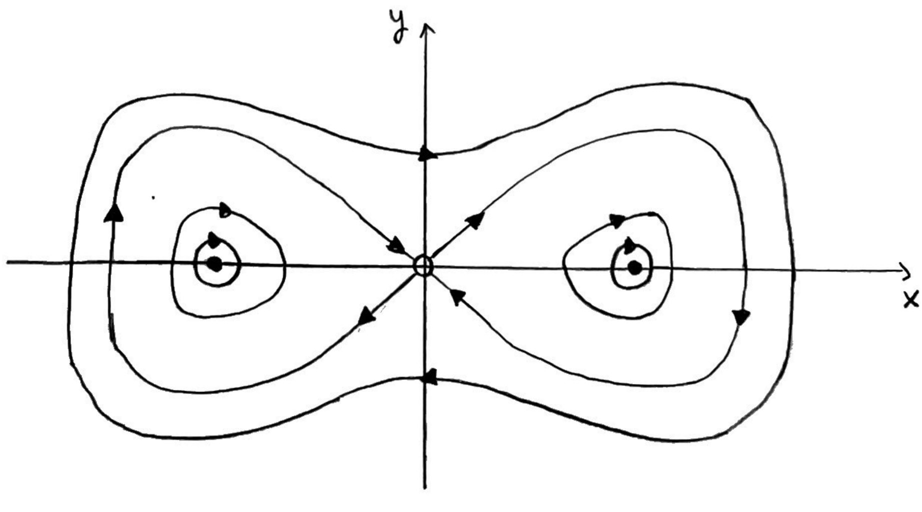
$F(x) = -\dfrac{dV}{dx} = x - x^3 \Rightarrow \ddot{x} = x - x^3 \Rightarrow \begin{cases}\dot{x} = y \\ \dot{y} = x - x^3 = x(1-x^2)\end{cases}$

Punti fissi $(0,0)$; $(1,0)$; $(-1,0)$

Jacobiano $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-3x^2 & 0 \end{pmatrix}$ $\Delta = 3x^2 - 1$, $\tau = 0$

$(0,0)$	SELLA
$(1,0)$	CENTRO
$(-1,0)$	CENTRO

I centri dovrebbero farci chiedere se lo siano veramente.
In questo caso sì perché l'energia è conservata.
Le traiettorie sono curve chiuse con energia costante $E = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4 = \text{cost.}$



in generale SOLUZIONI PERIODICHE

Fanno eccezione i punti di equilibrio $(1,0)$ e $(-1,0)$ e le due traiettorie che partono dall'origine e ritornano ad esso.

DEFINIZIONE

Traiettorie che partono da un punto fisso e tornano ad esso sono dette OMOCLINICHE.

Sono comuni nei sistemi conservativi ma rare altrove.

Un'orbita omoclinica non è una soluzione periodica poiché il sistema necessita un tempo infinito $(t \to \pm\infty)$ per raggiungere il punto fisso.

← le piccole oscillazioni intorno ai punti di equilibrio corrispondono alle piccole orbite chiuse.

punti di equilibrio neutralmente stabili corrispondenti ai punti fissi $(1,0)$, $(-1,0)$

TEOREMA per i centri nonlineari dei sistemi conservativi

Sia $\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x})$, con $\underline{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ e $\underline{f}$ continuamente differenziabile, $E(\underline{x})$ una quantità conservata e $\underline{x}^*$ un punto fisso isolato.

Se $\underline{x}^*$ è un minimo locale di E allora tutte le traiettorie sufficientemente vicine a $\underline{x}^*$ sono chiuse.

Esempio: orbite periodiche nell'esempio precedente intorno a $(1,0)$ o $(-1,0)$.
I centri si trovano ai minimi locali della funzione energia.

Osservazioni. Il teorema è valido anche per massimi locali di E, rimpiazzando $E \mapsto -E$.

(diapositive da figure 6.5.3 del libro)

ENERGIA E CENTRI

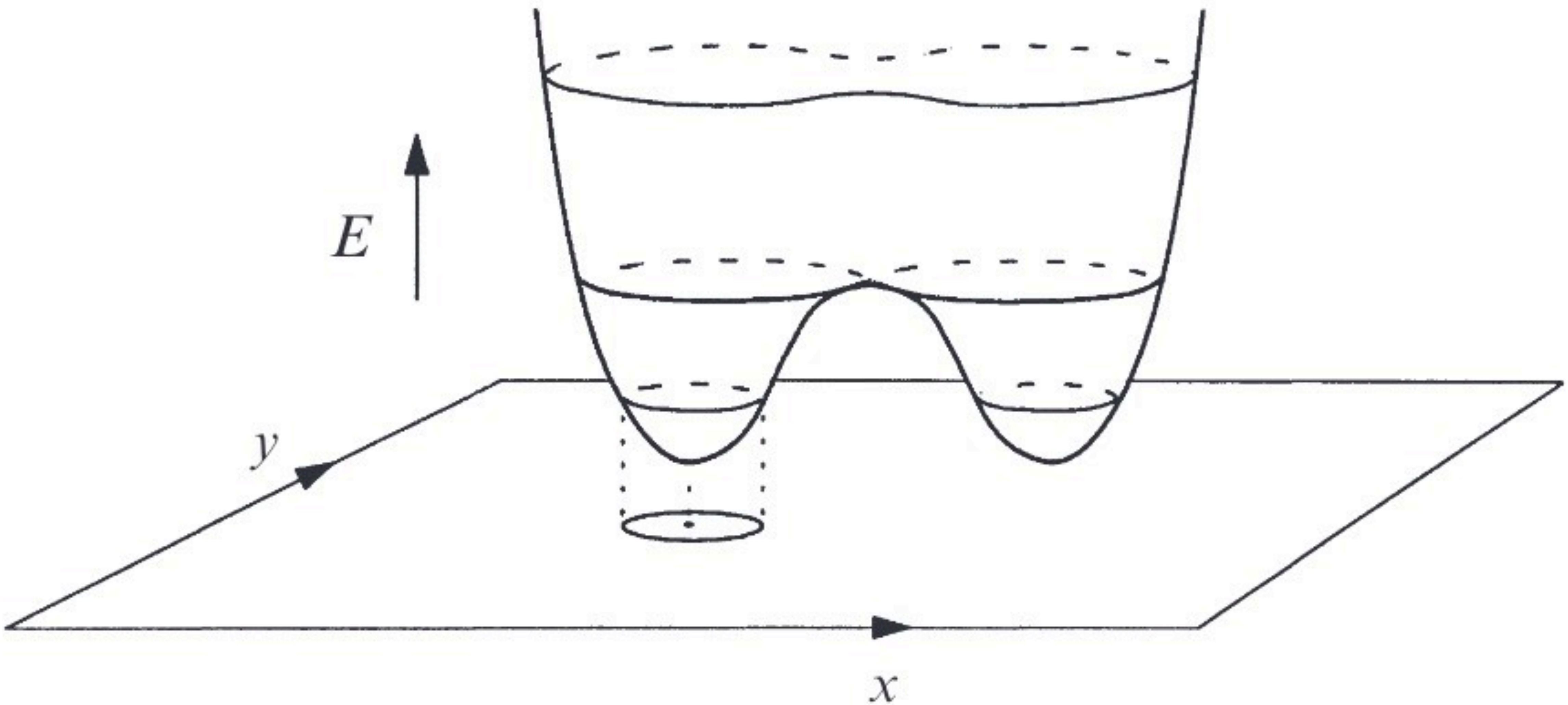


Immagine da S. H. Strogatz, Nonlinear Dynamics and Chaos, CRC Press.

SISTEMI REVERSIBILI

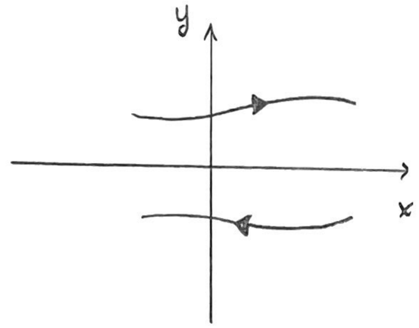
Qualsiasi sistema del secondo ordine invariante per $t \mapsto -t$
$y \mapsto -y$

Esempio $\dot{x} = f(x,y)$ con f dispari in y, $f(x,-y) = -f(x,y)$
$\dot{y} = g(x,y)$ e g pari in y, $g(x,-y) = g(x,y)$

Esempio
Ogni sistema meccanico del tipo $m\ddot{x} = F(x)$ è REVERSIBILE NEL TEMPO
$t \mapsto -t$
$y \mapsto -y$

$\dot{x} = y$
$\dot{y} = \frac{1}{m} F(x)$ le equazioni rimangono le stesse

Se $\big(x(t), y(t)\big)$ è soluzione allora anche $\big(x(-t), -y(-t)\big)$ lo è:



I sistemi reversibili sono diversi dai sistemi conservativi ma condividono diverse proprietà.

Teorema per i centri non lineari nei sistemi reversibili

Supponiamo $x^* = \underline{0}$ centro non lineare per $\dot{x} = f(x,y)$ reversibile.
$\dot{y} = g(x,y)$

Allora tutte le traiettorie sufficientemente vicine a $\underline{x}^*$ sono chiuse.