Fondamenti della Meccanica Quantistica

Giuseppe Pucci

anno accademico 2024-2025
lezione 1

Programma indicativo del corso

Lezione 1 - Teorie pre-quantistiche ed esempi quantistici

Lezione 2 - Misura, Località e Ontologia

Lezione 3 - Interpretazione di Copenhagen e Teoria a onda pilota di Bohm

Seminario - Storia delle analogie quantistiche con i walker

Lezione 4 - Paradosso EPR e teorema di Bell

Lezione 5 - Moderne teorie ad onda pilota ispirate dai walker

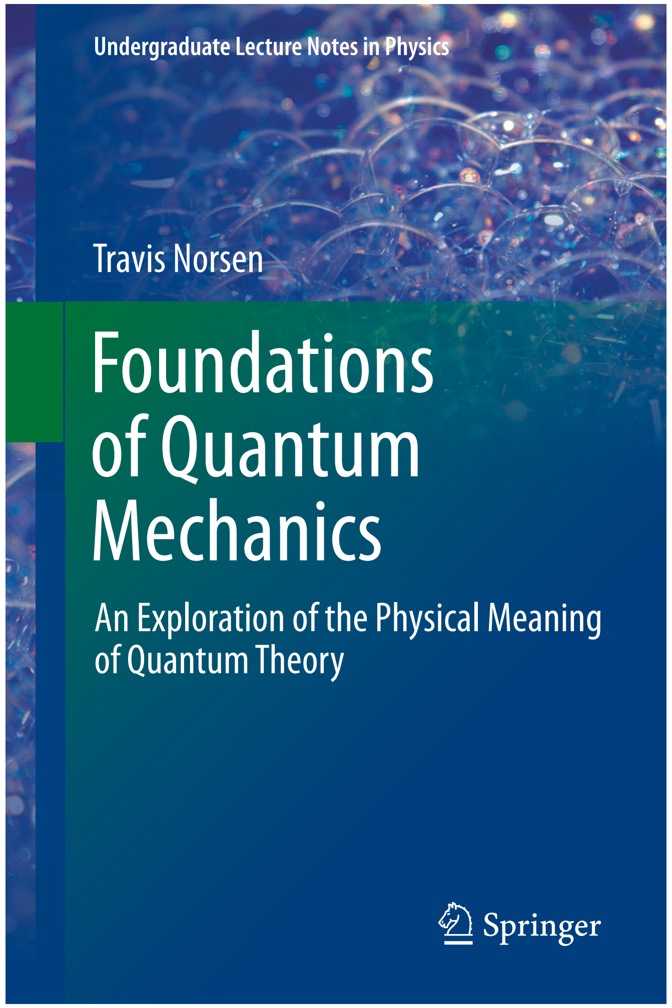
Fonti

Lezione 1 - Teorie pre-quantistiche ed esempi quantistici

Lezione 2 - Misura, Località e Ontologia

Lezione 3 - Interpretazione di Copenhagen e Teoria a onda pilota di Bohm

Lezione 4 - Paradosso EPR e teorema di Bell



Fonti: ultime ricerche (2005-oggi)

Seminario - Storia delle analogie quantistiche con i walker

Lezione 5 - Moderne teorie ad onda pilota ispirate dai walker

Le questioni fondamentali che affronteremo

Cosa esiste?

Come si comportano queste cose quando nessuno le sta osservando?

Come si comportano queste cose quando qualcuno le sta osservando?

(Separare queste domande ci indica che stiamo parlando di teoria quantistica).

La funzione d'onda cosa rappresenta?

From the review by Tim Maudlin of the book "Foundations of Quantum Mechanics" by Travis Norsen, Springer 2017.
Am. J. Phys. 86, 953 (2018).

Bohr always would go in for this remark, 'You cannot really explain it in the framework of space and time.' By God, I was determined I was going to explain it in the framework of space and time.

—John Slater

From "Foundations of Quantum Mechanics" by Travis Norsen, Springer 2017.

Fondamenti della meccanica quantistica

27-11-2024

Lezione 1

TEORIE PRE-QUANTISTICHE

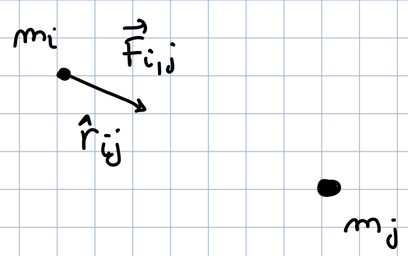
Meccanica newtoniana

Il mondo fisico consiste di particelle interagenti tramite forze che le particelle esercitano una sull'altra e che influenzano il moto delle particelle stesse.

[slide Newton riprende Democrito] [Gli oggetti macroscopici sono costituiti da particelle elementari]

$$\vec{F}_{i,j} = G \frac{m_i m_j}{r_{ij}^2} \hat{r}_{ij} \quad , \quad r_{ij} = |\vec{r}_i - \vec{r}_j|$$

$$\hat{r}_{ij} = \frac{\vec{r}_j - \vec{r}_i}{r_{ij}}$$



forza gravitazionale esercitata da una particella di massa m_j su una particella di massa m_i.

G: costante di Newton misurata da Cavendish.

Forza totale su una particella i:

$$\vec{F}_i^{tot} = \sum_{j \neq i} \vec{F}_{i,j}$$

Seconda legge di Newton $\quad \vec{F}_i^{tot} = m_i \vec{a}_i$

mentre la terza $\quad \vec{F}_{i,j} = -\vec{F}_{j,i} \quad$ è contenuta nella legge di gravitazione.

1. I. Newton, *Opticks* (Dover Publications Inc, New York, 1952)

...it seems probable to me, that God in the Beginning form'd Matter in solid, massy, hard, impenetrable, moveable Particles, of such Sizes and Figures, and with such other Properties, and in such Proportion to Space, as most conduced to the End for which he form'd them; and that these primitive Particles being Solids, are incomparably harder than any porous Bodies compounded of them; even so very hard, as never to wear or break in pieces.... [A]ll material Things seem to have been composed of the hard and solid Particles above-mention'd, variously associated.... [1, pp. 400–2]

Bodies act one upon another by the Attractions of Gravity, Magnetism, and Electricity; and these Instances shew the Tenor and Course of Nature, and make it not improbable but that there may be more attractive Powers than these. .... [W]e must learn from the Phaenomena of Nature what Bodies attract one another, and what are the Laws and Properties of the Attraction.... The Attractions of Gravity, Magnetism, and Electricity, reach to very sensible distances, and so have been observed by vulgar Eyes, and there may be others which reach to so small distances as hitherto escape Observation.... [1, p. 376]

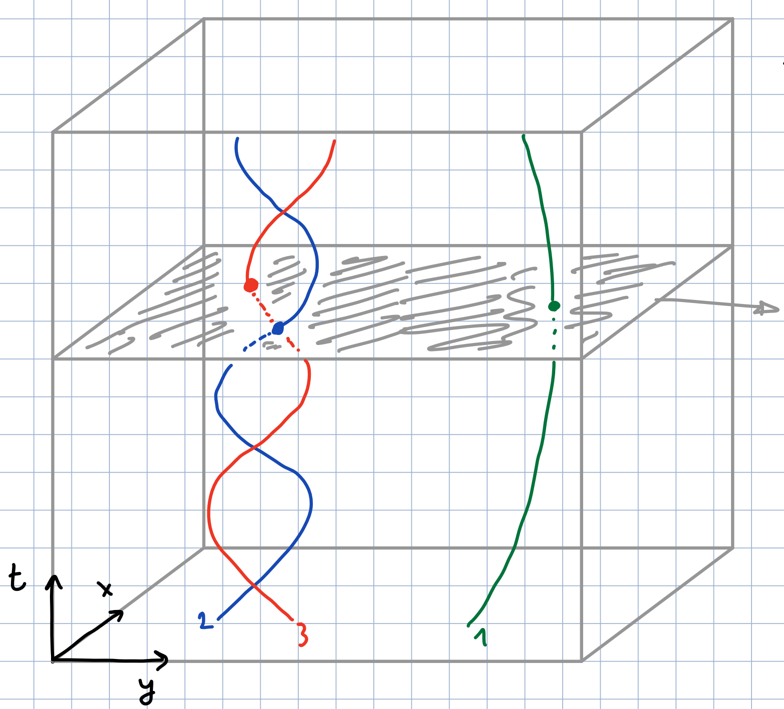
NOTA: L'applicabilità di queste leggi agli oggetti macroscopici è frutto di TEOREMI che derivano da queste leggi di base che, per Newton, riguardavano innanzitutto le particelle "primitive".

OSSERVAZIONE IMPORTANTE

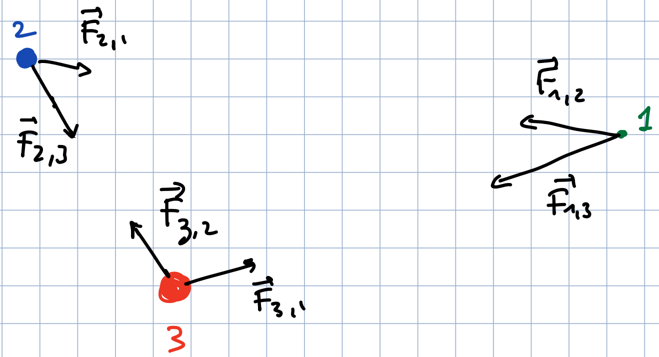
Le forze gravitazionali dipendono ISTANTANEAMENTE dalle posizioni delle particelle, quindi sono NON-LOCALI (Einstein la definirebbe "spooky action at a distance")
(inquietante azione a distanza).

Allo stesso Newton queste caratteristiche sembrano assurde, tant'è che considerava la sua gravitazione come un punto di partenza ancora incompleto (poi sarà formulato il concetto di campo)
[slide Newton]

DIAGRAMMA SPAZIO-TEMPORALE



SISTEMA



2. J. Andrew, Newton's Philosophy, in *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, ed. by E.N. Zalta (2009), http://plato.stanford.edu/archives/win2009/entries/newton-philosophy/

It is inconceivable that inanimate brute matter should, without the mediation of something else which is not material, operate upon and affect other matter without mutual contact... That gravity should be innate, inherent, and essential to matter, so that one body may act upon another at a distance through a vacuum, without the mediation of anything else, by and through which their action and force may be conveyed from one to another, is to me so great an absurdity that I believe no man who has in philosophical matters a competent faculty of thinking can ever fall into it [2].

From "Foundations of Quantum Mechanics" by Travis Norsen, Springer 2017.

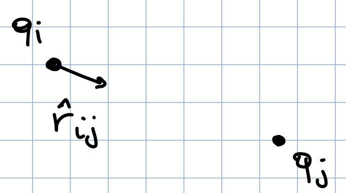
3. A. Einstein, Autobiographical Notes, in *Albert Einstein: Philosopher-Scientist*, ed. by P.A. Schilpp (Harper and Row, New York, 1959)

There is [according to relativity] no such thing as simultaneity of distant events; consequently there is also no such thing as immediate action at a distance in the sense of Newtonian mechanics [3, p. 61].

Per credere alle equazioni del moto di Newton abbiamo bisogno di affermare che i punti sulla sezione grigia sono SIMULTANEI. Infatti, se applicassimo la gravitazione di Newton a una sezione tiltata i conti non tornerebbero. Quindi la sezione orizzontale è oggettivamente corretta. [slide simultaneità Einstein]

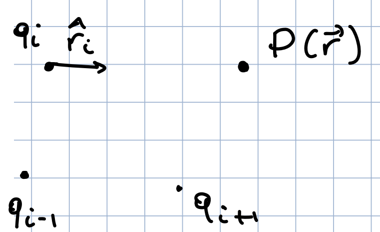
Elettrodinamica di Maxwell

Legge di Coulomb
$$\vec{F}_{i,j} = -\frac{k q_i q_j}{r_{ij}^2}\,\hat{r}_{ij}, \qquad r_{ij} = |\vec{r}_i - \vec{r}_j|$$
$$\hat{r}_{ij} = \frac{\vec{r}_j - \vec{r}_i}{r_{ij}}$$



$$\vec{F}_i^{\,tot} = \sum_{j \neq i} \vec{F}_{i,j}$$

Il CAMPO viene solitamente introdotto come uno strumento di calcolo:
$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}^{\,tot}(\vec{r})}{q}$$



$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{k q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^2}\,\hat{r}_i \qquad \hat{r}_i = \frac{\vec{r}_i - \vec{r}}{|\vec{r}_i - \vec{r}|}$$

qui è contenuto il PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE.

Una particella con carica q farà esperienza di una forza:
$$\vec{F} = q\,\vec{E}$$

Ma così il campo elettrico sembra un inutile passaggio in più, perché non eliminarlo e tornare alla forza di Coulomb?

Il punto è che $\vec{E}$ (e $\vec{B}$) sono evidentemente (sperimentalmente) degli oggetti REALI che trasportano, per esempio, energia e quantità di moto, quindi ESISTONO insieme alle particelle cariche.

Equazioni di Maxwell

$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$ Legge di Gauss $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$

$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ Legge di Gauss per il magnetismo

$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \varepsilon_0 \mu_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ Legge di Ampère

$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ Legge di Faraday

Le ultime due implicano l'esistenza di onde elettromagnetiche, che si propagano alla velocità della luce $c = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$

Per completare la teoria abbiamo bisogno di sapere come le particelle cariche rispondono ai campi

$$\vec{F} = q\,\vec{E}(\vec{r}) + q\,\vec{v} \wedge \vec{B}(\vec{r})$$

Quindi, secondo l'elettrodinamica di Maxwell, le particelle cariche si muovono dentro una sorta di mezzo intermediario che permea lo spazio (cosa obsoleta da Newton).
I campi stessi sono oggetti dinamici reali.

Località

Tutte le interazioni elettromagnetiche si propagano alla velocità della luce c (o più lentamente, in alcune situazioni).

Dalle equazioni di Maxwell si può ricavare:

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{\nabla}\left(\frac{\rho}{\varepsilon_0}\right) + \frac{\partial}{\partial t}(\mu_0 \vec{J}) \qquad (1)$$

nello spazio vuoto $\rho = 0$, $\vec{J} = \underline{0}$, quindi:

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \qquad (1\text{bis})$$

In maniera simile

$$\nabla^2 \vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{\nabla} \wedge \vec{J} \qquad (2)$$

e $$\nabla^2 \vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0 \qquad (2\text{bis})$$

<u>NOTA</u>: Le due onde, elettrica e magnetica, sono necessariamente accoppiate (onde elettromagnetiche).

Consideriamo le equazioni (1) e (2) come 6 equazioni, una per ogni componente dei campi. Queste equazioni hanno tutte una struttura del tipo:

$$\nabla^2 \psi(\vec{x},t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \psi(\vec{x},t)}{\partial t^2} = \underbrace{f(\vec{x},t)}_{\text{termine di sorgente}} \qquad (3)$$

Se la sorgente è concentrata in un singolo punto $\vec{x} = \vec{x}'$ e appare solo all'istante $t = t'$

$$f(\vec{x},t) = \delta^3(\vec{x}-\vec{x}')\,\delta(t-t')$$

allora

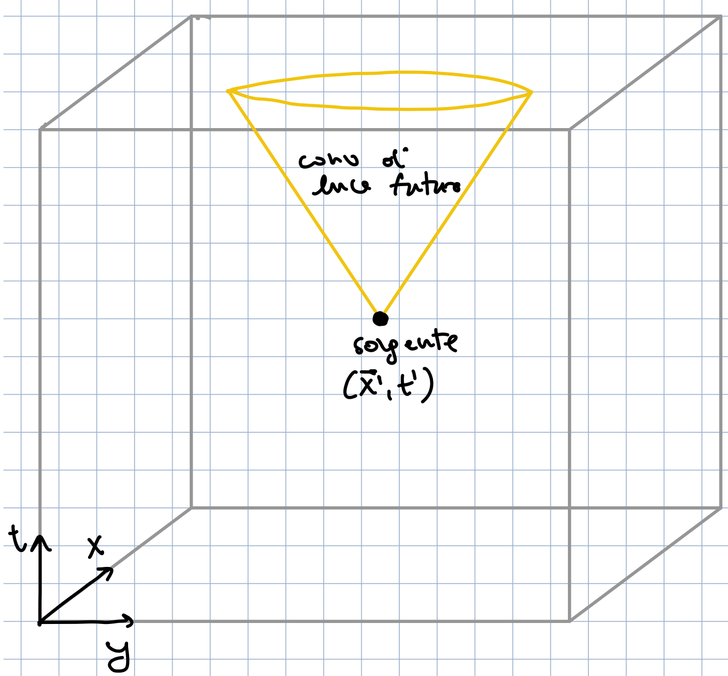
funzione di Green ← $\psi_{\vec{x}',t'}(\vec{x},t) = -\frac{1}{4\pi}\,\frac{\delta\left(t-\left[t'+\frac{|\vec{x}-\vec{x}'|}{c}\right]\right)}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$ (4)

è una soluzione dell'equazione (3), che implica che il campo ψ non è zero solo quando

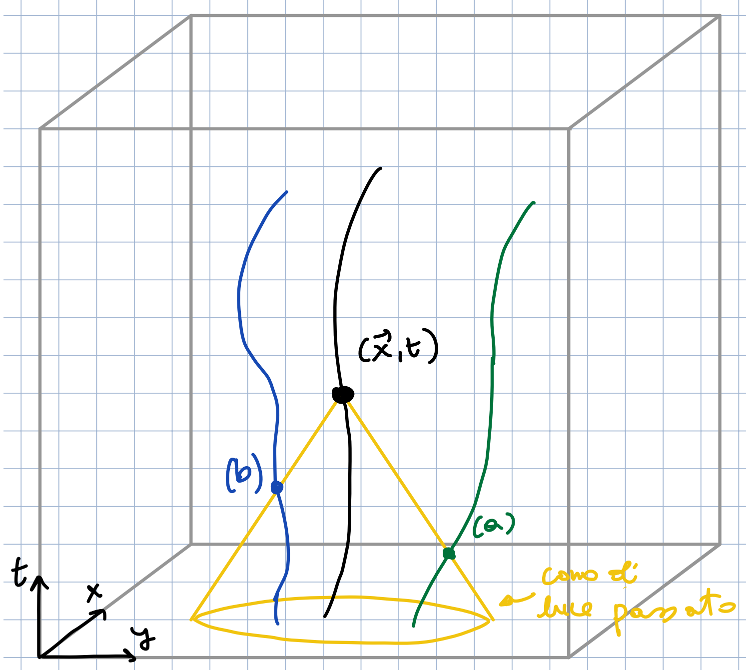
$$t = t' + \frac{|\vec{x}-\vec{x}'|}{c}$$

DELTA DI DIRAC
distribuzione o funzionale
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-x_0)\,\phi(x)\,dx = \phi(x_0)$$

cioè in punti $\vec{x}$ e tempi t raggiunti da un segnale che si propaga con velocità c da una sorgente in $\vec{x}'$ e t'.



Nello spazio tridimensionale è da immaginare come un "guscio" sferico che si propaga alla velocità della luce.



Ciò che accade ad una particella carica in $(\vec{x},t)$ è determinato, secondo la legge di Lorentz, dai campi $\vec{E}(\vec{x},t)$, $\vec{B}(\vec{x},t)$, i quali a loro volta sono determinati dalle sorgenti contenute* nel cono di luce passato di $(\vec{x},t)$.

* sulla superficie del cono se si è nel vuoto e le onde si propagano a c.

OSS. La (4) è una soluzione particolare dell'equazione non-omogenea. La soluzione dell'equazione omogenea corrisponde a onde elettromagnetiche che si propagano alla velocità della luce.
↳ "libera"

OSS. L'elettrodinamica di Maxwell è una teoria completamente locale, a differenza della gravitazione di Newton, cosa che la rende compatibile con la relatività di Einstein.

Qui la simultaneità è relativa: non si può dire in maniera oggettiva quale insieme di eventi sia simultaneo a un dato punto dello spazio-tempo.

NOTA La teoria della relatività generale di Einstein deriva dal risolvere questo problema della gravitazione di Newton.

[slide con parole di Einstein]

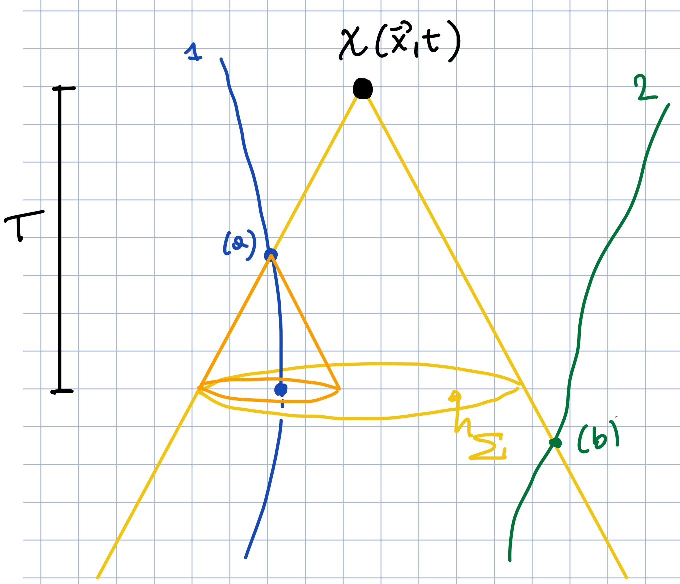
Il successo della teoria della relatività ha suggerito fortemente che questo tipo di causalità locale relativistica potesse essere una proprietà necessaria di ogni teoria fisica accettabile.

Proveremo quindi a fornirne una formulazione più generica, seguendo le idee di John Stewart Bell.

5. A. Einstein, *Relativity: The Special and the General Theory* (Penguin Classics, New York, 2006)

The success of the Faraday-Maxwell interpretation of electromagnetic action at a distance resulted in physicists becoming convinced that there are no such things as instantaneous action at a distance (not involving an intermediary medium) of the type of Newton's law of gravitation. According to the theory of relativity, action at a distance with the velocity of light always takes the place of instananeous action at a distance or of action at a distance with an infinite velocity of transmission. This is connected with the fact that the velocity c plays a fundamental role in this theory [5, p. 47].

Formulazione di Bell del concetto di località



OSS. Bell osserva che l'elettrodinamica di Maxwell possiede la seguente proprietà: una descrizione completa di cariche e particelle in una sezione Σ, C_Σ, del cono di luce passato di un punto $(\vec{x},t)$ DETERMINA cosa accade in $(\vec{x},t)$.

OSS. In realtà Σ è una sfera di raggio cT centrata in $\vec{x}$.

- Ciò che la particella 1 fa in (a) influenza $(\vec{x},t)$, anche se $(a) \notin C_\Sigma$.
- Ma (a) è influenzato da un sottoinsieme di C_Σ.

Formalmente potremo scrivere

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{physical fact}}}{\chi}(\vec{x},t) = f(C_\Sigma)$$

equazione che contiene l'idea di CAUSALITÀ LOCALE RELATIVISTICA di ogni TEORIA DETERMINISTICA.

Bell propone di modificare la definizione di località e giungere a qualcosa che mantiene ancora l'idea di CAUSALITÀ LOCALE RELATIVISTICA che sia applicabile alle teorie non deterministiche:

$$P[\chi_1 | C_\Sigma] = P[\chi_1 | C_\Sigma, \chi_2]$$

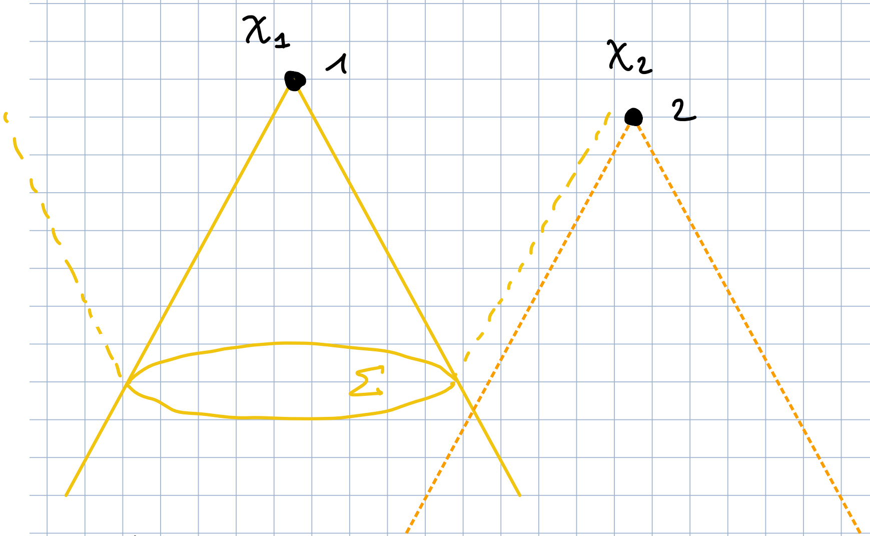
si tratta di probabilità condizionate.

5. A. Einstein, *Relativity: The Special and the General Theory* (Penguin Classics, New York, 2006)

The success of the Faraday-Maxwell interpretation of electromagnetic action at a distance resulted in physicists becoming convinced that there are no such things as instantaneous action at a distance (not involving an intermediary medium) of the type of Newton's law of gravitation. According to the theory of relativity, action at a distance with the velocity of light always takes the place of instananeous action at a distance or of action at a distance with an infinite velocity of transmission. This is connected with the fact that the velocity c plays a fundamental role in this theory [5, p. 47].

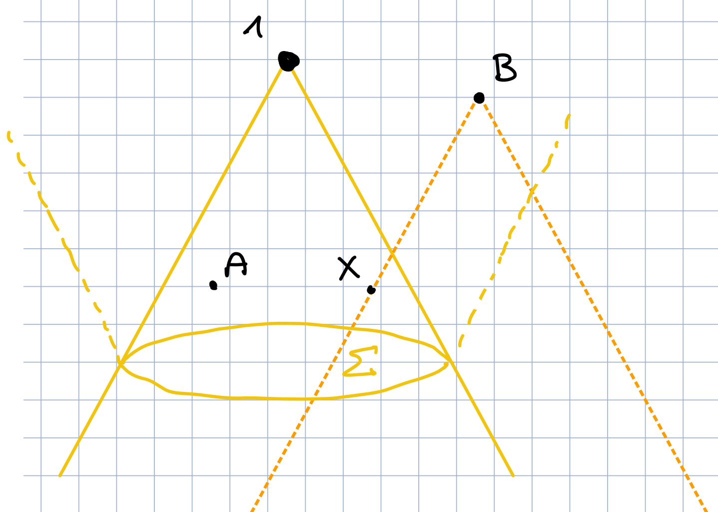
From "Foundations of Quantum Mechanics" by Travis Norsen, Springer 2017.

$P[X_1 | C_\Sigma]$: probabilità che X_1 accade sapendo che C_Σ è accaduto.
$P[X_1 | C_\Sigma, X_2]$: probabilità che X_1 accade sapendo che C_Σ e X_2 sono accaduti.



X_2 non può essere influenzato causalmente dagli eventi in Σ.
[slide con spiegazione di Bell]

<u>Oss.</u> Il determinismo è ancora permesso come caso particolare in cui la probabilità assume valori 0 o 1. <u>Es.</u> $P[X_1 | C_\Sigma] = 1$.



- In una teoria non-deterministica A può non essere determinato da C_Σ, quindi conoscere A può migliorare la nostra predizione di 1.

- Può sembrare che B, invece, non aiuti a migliorare le nostre predizioni su 1.

- Tuttavia può esistere un evento X, influenzato (non determinato) dagli eventi in Σ, che influenza sia 1 che B.

- Quindi informazioni su B possono darci informazioni su X che a loro volta possono migliorare le nostre predizioni su 1 rispetto alla sola conoscenza di C_Σ.

- Quindi, in questa formulazione, è importante che B sia al di fuori del cono di luce futuro di Σ.

Un altro modo di formulare la località di Bell è:

$$P[x_1 | C_\Sigma, x_2] = P[x_1 | C_\Sigma, x_2']$$

dove x_2, x_2' sono due cose diverse che possono accadere in 2.

Ontologia

Etimologia: dal greco ὄντος (dell'essere) e λόγος (discorso)

studio dell'essere, studio di ciò che è.

L'ontologia dell'elettrodinamica di Maxwell include particelle e campi, non altro.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \Rightarrow \underbrace{\vec{\nabla} \wedge \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0}_{\text{legge di Faraday}}$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = -\vec{\nabla} \wedge \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla}\phi$$

convenzione / convenienza

$$\Rightarrow \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Le altre equazioni di Maxwell possono essere riscritte:

$$\nabla^2 \phi + \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = -\rho/\varepsilon_0$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J} + \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)$$

Se $\vec{A} \to \vec{A} + \vec{\nabla}\lambda$ allora $\vec{B}$ non cambia, ma $\vec{E}$ sì.

Tuttavia questo si può compensare con $\phi \to \phi - \frac{\partial \lambda}{\partial t}$

Sono trasformazioni di gauge.

Siamo liberi di scegliere λ.

Gauge di Lorentz: $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$

$$\Rightarrow \quad \nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t} = - \rho / \varepsilon_0$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = - \mu_0 \vec{J}$$

l'effetto delle cariche sui potenziali si propaga verso l'esterno alla velocità della luce.

Gauge di Coulomb $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$

$$\Rightarrow \quad \nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = - \mu_0 \vec{J} + \frac{1}{c^2} \vec{\nabla} \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

$$\nabla^2 \phi = - \rho / \varepsilon_0$$

Qui ϕ è determinato ISTANTANEAMENTE dalla configurazione delle cariche $\rho(\vec{x}, t)$, quindi è NON-LOCALE!

Ma questo non ci interessa perché non attribuiamo a ϕ una realtà fisica.

In questo senso, mentre è appropriato che χ sia $\vec{E}$ o $\vec{B}$, non è appropriato che χ sia ϕ.

χ quindi identifica quantità che hanno una realtà fisica.

Bell: « Le convenzioni possono propagarsi veloci quanto vogliono, ma quindi dobbiamo distinguere tra cose è convenzione e cose non lo è.»

6. J.S. Bell, La Nouvelle Cuisine, reprinted in *Speakable and Unspeakable in Quantum Mechanics*, 2nd edn. (Cambridge University Press, Cambridge, 2004)

The situation is further complicated by the fact that there *are* things which *do* go faster than light. British sovereignty is the classical example. When the Queen dies in London (long may it be delayed) the Prince of Wales, lecturing on modern architecture in Australia, becomes *instantaneously* King. (Greenwich Mean Time rules here.) And there are things like that in physics. In Maxwell's theory, the electric and magnetic fields in free space satisfy the wave equation

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{E} = 0,$$
$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{B} = 0$$

...corresponding to propagation with velocity c. But the scalar potential, if one chooses to work in 'Coulomb gauge', satisfies Laplace's equation

$$-\nabla^2 \phi = 0$$

...corresponding to propagation with infinite velocity. Because the potentials are only mathematical conveniences, and arbitrary to a high degree, made definite only by the imposition of one convention or another, this infinitely fast propagation of the Coulomb-gauge scalar potential disturbs no one. Conventions can propagate as fast as may be convenient. But then we must distinguish in our theory between what is convention and what is not [6].

From "Foundations of Quantum Mechanics" by Travis Norsen, Springer 2017.

[Esempio del regno di Gran Bretagna, di Bell]

Questo apre alla domanda: in meccanica quantistica, cosa dobbiamo considerare reale e cosa no? La funzione d'onda?

Misure

- Misure dirette (es. righello).
- Ci sono cose di cui parlano le teorie che in linea di principio non sono direttamente osservabili.
- In questi casi "misurare" o "osservare" richiedono sistemi di misura sofisticati.

<u>Es.</u> Il campo elettrico all'interno di un condensatore si può misurare ponendovi una carica e misurandone l'accelerazione.

1) Una teoria che non formula predizioni verificabili è tagliata fuori dalla struttura della conoscenza empirica e non è significativa.

2) Allo stesso tempo, non è vero che tutto ciò che la teoria dice debba essere direttamente osservabile. Cioè si può postulare l'esistenza di cose non osservabili purché la teoria le connetta, in qualche modo, con cose misurabili o osservabili.

In generale, qualsiasi misura deve produrre effetti nella configurazione di un oggetto macroscopico. [esempio del puntatore, slide]

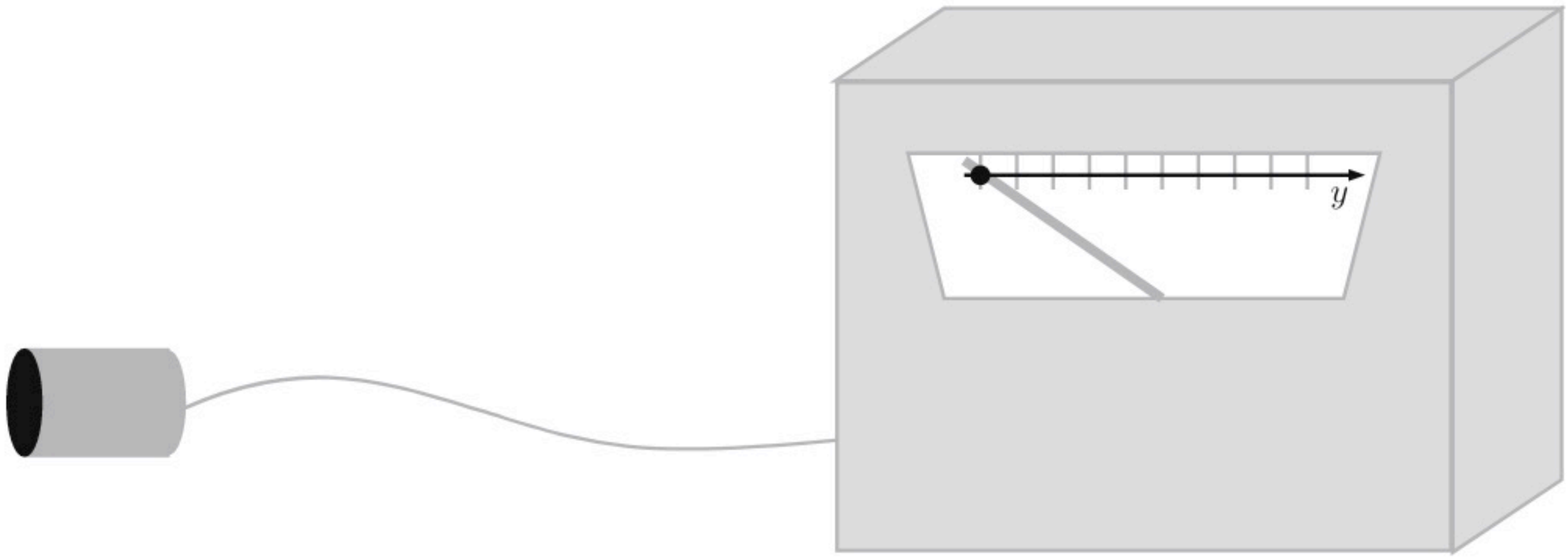


Fig. 1.9 A schematic measuring device whose probe end (on the *left*) can be arranged to interact with some (perhaps microscopic/invisible) system of interest. The outcome of the measurement is then registered by the position y of the device's pointer. This is a relatively accurate picture of how some real measuring devices work, but also captures in essentialized terms an important point about *any* kind of measurement: at the end of the day, the outcome is registered in the configuration of some directly-observable (macroscopic) object (e.g., the position of the hands of a stopwatch, the distribution of ink on a printout, etc.)

From "Foundations of Quantum Mechanics" by Travis Norsen, Springer 2017.

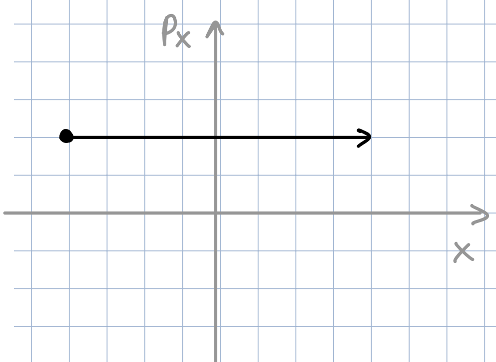
Es. la carica è il puntatore che misura il campo elettrico all'interno del condensatore.

La percezione diretta ci dà qualche informazione sulla struttura del mondo, ma non tutto.

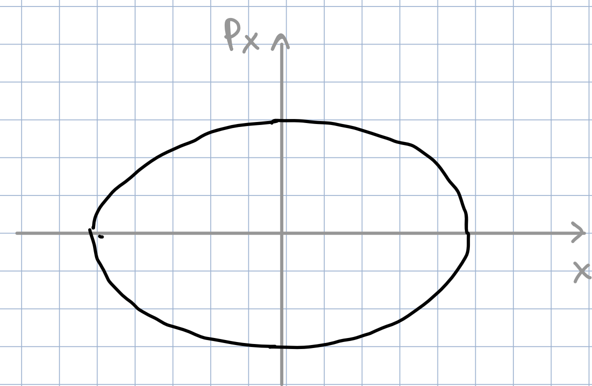
Se una teoria predice una cosa sbagliata su dove il puntatore (oggetto macroscopico) punta, allora la teoria non è corretta.

Spazi astratti

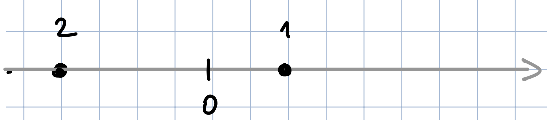
Particella libera in moto unidimensionale

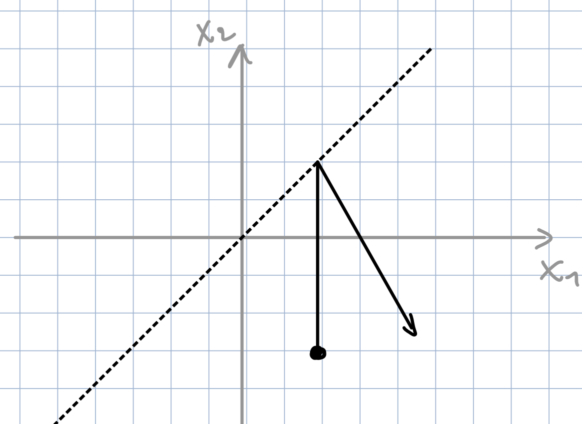


Oscillatore armonico 1D



Scontro tra particelle





Da non confondere con gli spazi reali: questo può sembrare ovvio ma vedremo che non è così quando discuteremo dell'ontologia della meccanica quantistica.

ESEMPI QUANTISTICI

Introduzione

Equazione di Schrödinger indipendente dal tempo $\qquad i\hbar \dfrac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H}\psi$

Particella di massa m in una dimensione

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)$$

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} + V(x,t)\,\Psi(x,t)$$ 1° postulato

Solitamente si parte da una $\psi(x,0)$ e si calcola $\psi(x,t)$.

2° postulato : regola di Born

$$p(x) = |\psi(x,t)|^2$$ densità di probabilità

$$p(x)\,dx = |\psi|^2 dx$$ probabilità di trovare la particella in dx.

con $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi|^2 dx = 1$

$$\psi(x,t) = \sum_i c_i\, \psi_i(x,t)$$

autostati

integrale se la proprietà da misurare ha uno spettro continuo.

dove $\hat{A}\,\psi_i(x,t) = A_i\,\psi_i(x,t)$

$$P(A_i) = |c_i|^2$$ probabilità di ottenere A_i come risultato della misura.

Adesso torniamo all' equazione di Schrödinger. Come la risolviamo?

Soluzioni separabili:

$$\Psi_n(x,t) = \varphi_n(x)\, f_n(t)$$

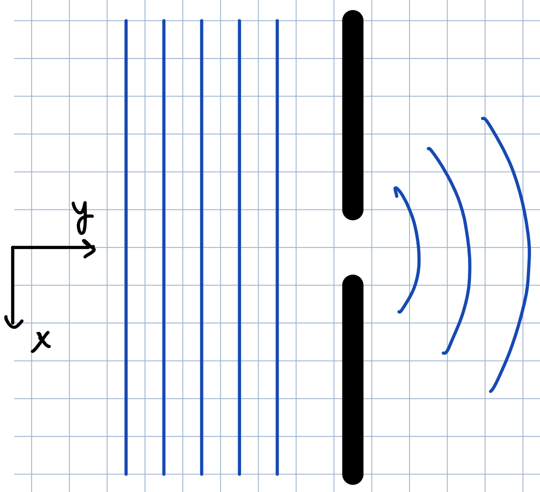
$$\Rightarrow \quad -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial x^2} + V(x)\,\varphi_n(x) = E_n\,\varphi_n(x)$$

$$i\hbar \frac{d f_n(t)}{dt} = E_n f_n(t) \quad \Rightarrow \quad f_n(t) = e^{-iE_n t/\hbar}$$

Se $\quad \Psi(x,0) = \sum_n c_n\,\varphi_n(x)$

allora $\quad \Psi(x,t) = \sum_n c_n\,\varphi_n(x)\, e^{-iE_n t/\hbar}$

Diffrazione e interferenza



Per semplicità, solitamente si risolve il caso di una fenditura "gaussiana", in cui cioè l'apertura "trasmette" una funzione d'onda gaussiana.

Inoltre ipotizziamo che l'onda si propaghi nella direzione y con velocità $v = \frac{\hbar k}{m}$, quindi legge oraria lungo y: $y = vt$.

L'intensità è data da:

$$I(x,y) = |\psi(x,y)|^2 = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\hbar^2 y^2}{4m^2 v^2 \sigma^4}}} \, e^{-x^2 / 2\left(\sigma^2 + \frac{\hbar^2 y^2}{4m^2 v^2 \sigma^4}\right)}$$

[Diapositive con grafico di $|\psi(x,y)|^2$ per la diffrazione]

Supponiamo adesso di avere due "fenditure gaussiane" e studiamone l'interferenza.

con centri in $x = a, -a$

$$\psi(x,0) \sim \psi_G(x-a, 0) + \psi_G(x+a, 0)$$

(si può fare la sovrapposizione perché l'equazione di Schrödinger è lineare in ψ.)

[Diapositive interferenza di fenditure gaussiane]

[Diapositive esperimenti d'interferenza]

Diffrazione

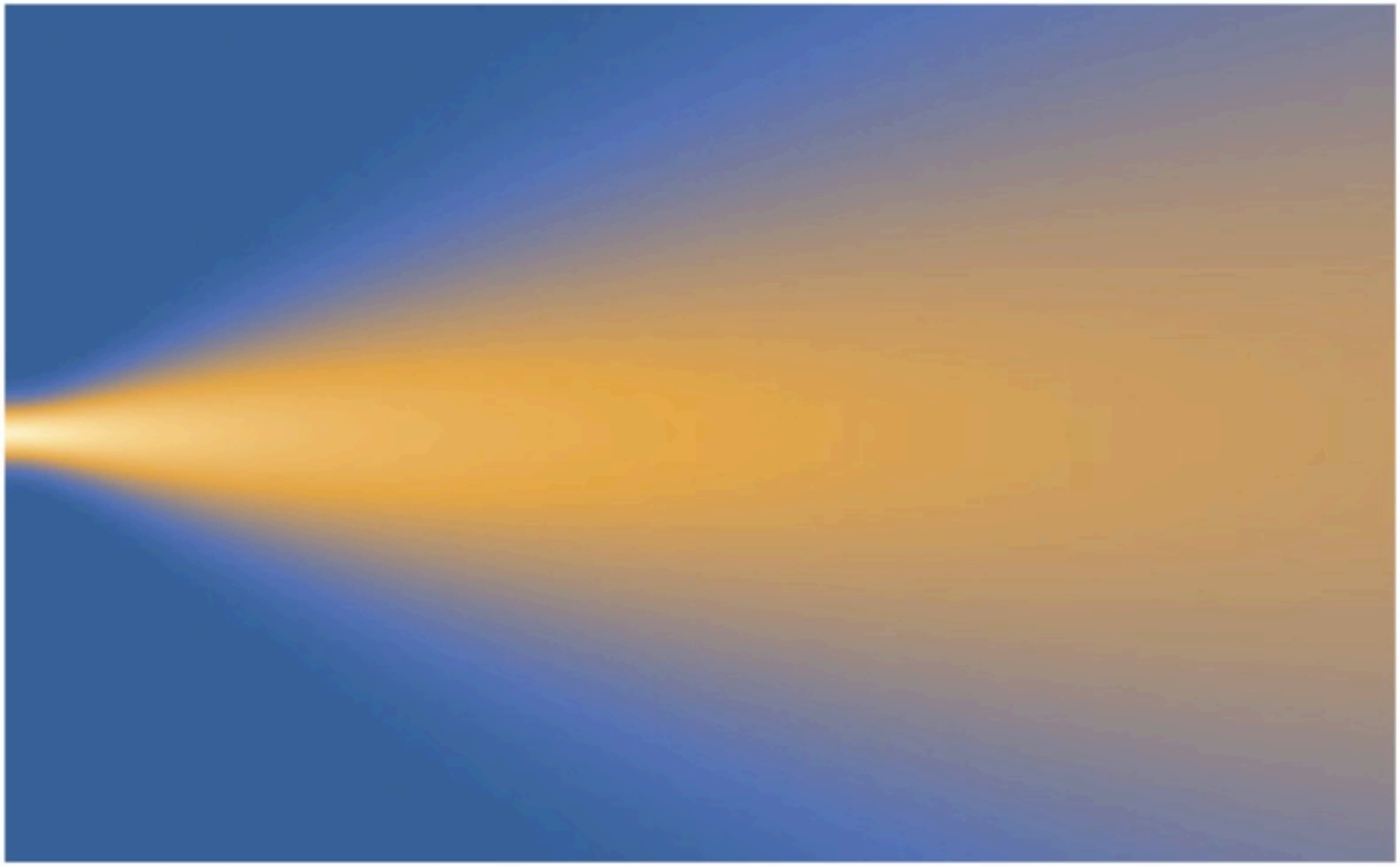


Fig. 2.6 Density plot of $|\Psi(x, y)|^2$ from Eq. (2.55) illustrating the intensity of a wave, diffracting as it propagates to the right having emerged from a "Gaussian slit" on the *left* edge of the image

From "Foundations of Quantum Mechanics" by Travis Norsen, Springer 2017.

Interferenza

$$\Psi(x,t) \sim \Psi_G(x-a,t) + \Psi_G(x+a,t) \sim \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 + \frac{i\hbar t}{2m}}}\left[e^{-\frac{(x-a)^2}{4(\sigma^2+i\hbar t/2m)}} + e^{-\frac{(x+a)^2}{4(\sigma^2+i\hbar t/2m)}}\right]$$

$$\Psi(x,y) \sim \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 + \frac{i\hbar y}{2mv}}}\left[e^{-\frac{(x-a)^2}{4(\sigma^2+i\hbar y/2mv)}} + e^{-\frac{(x+a)^2}{4(\sigma^2+i\hbar y/2mv)}}\right]$$

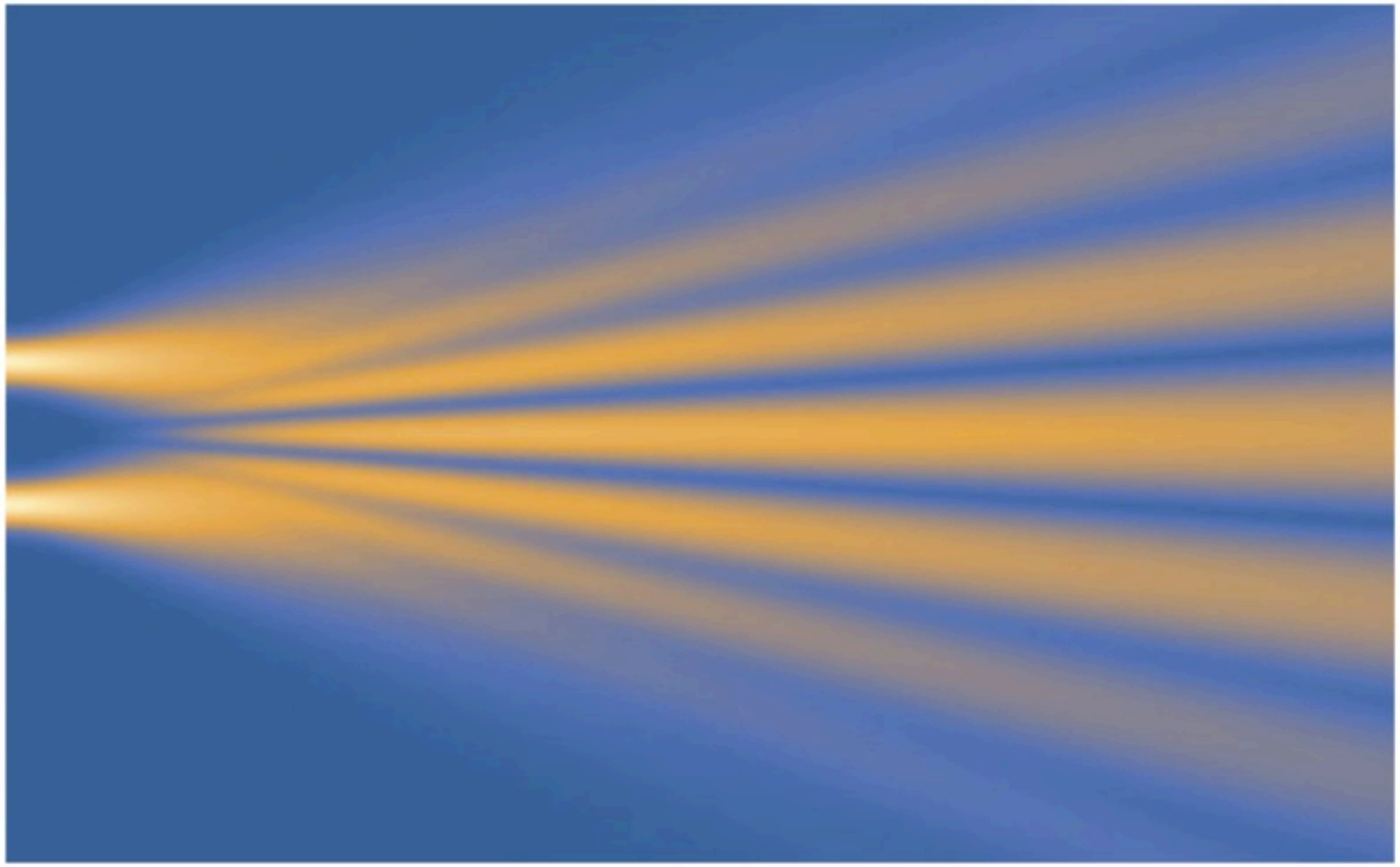
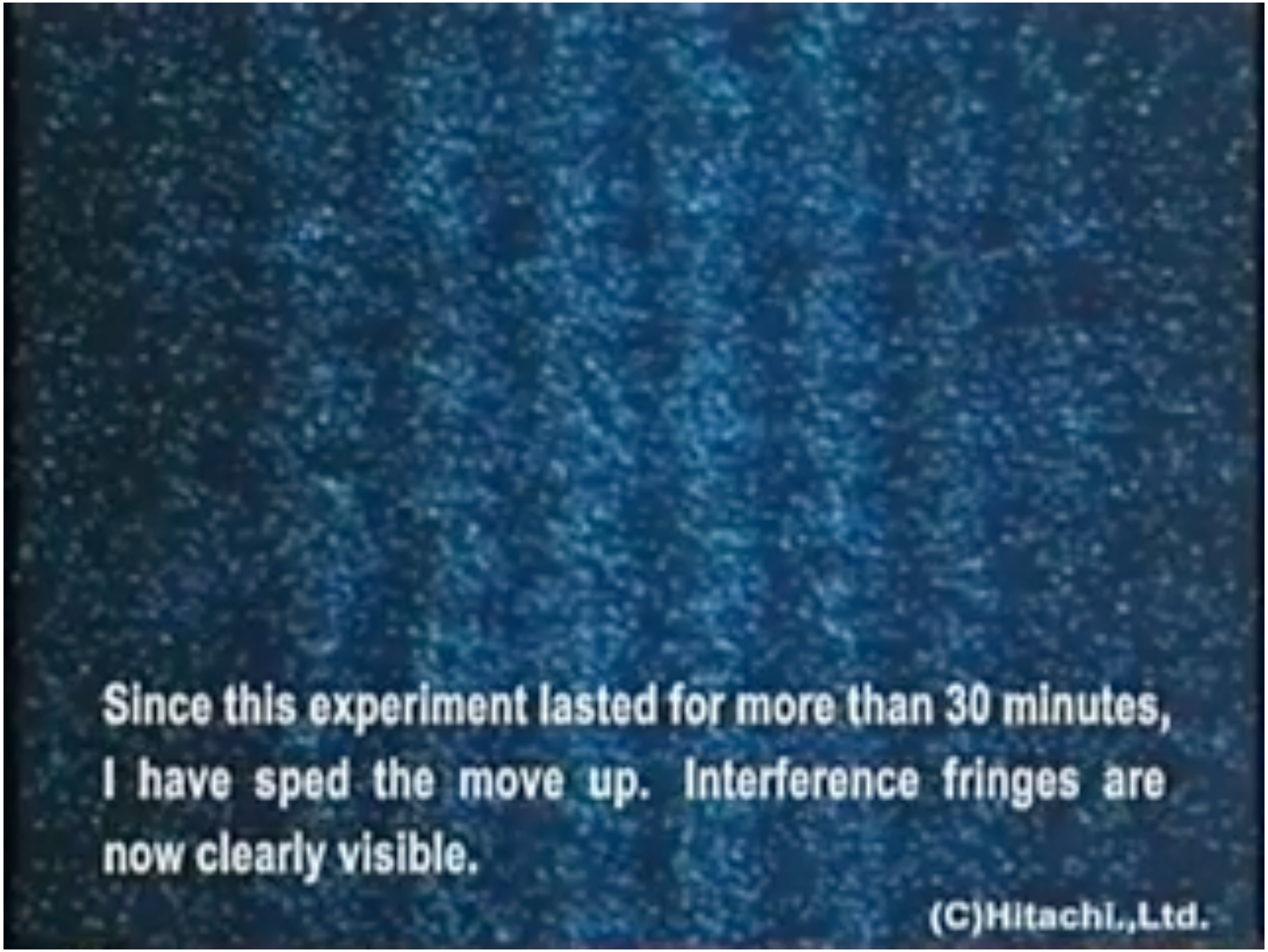


Fig. 2.7 Density plot of $|\Psi|^2$ from Eq. (2.58). A classic interference pattern emerges in the intensity of the wave downstream from the "double Gaussian slit" barrier at the *left* edge of the image

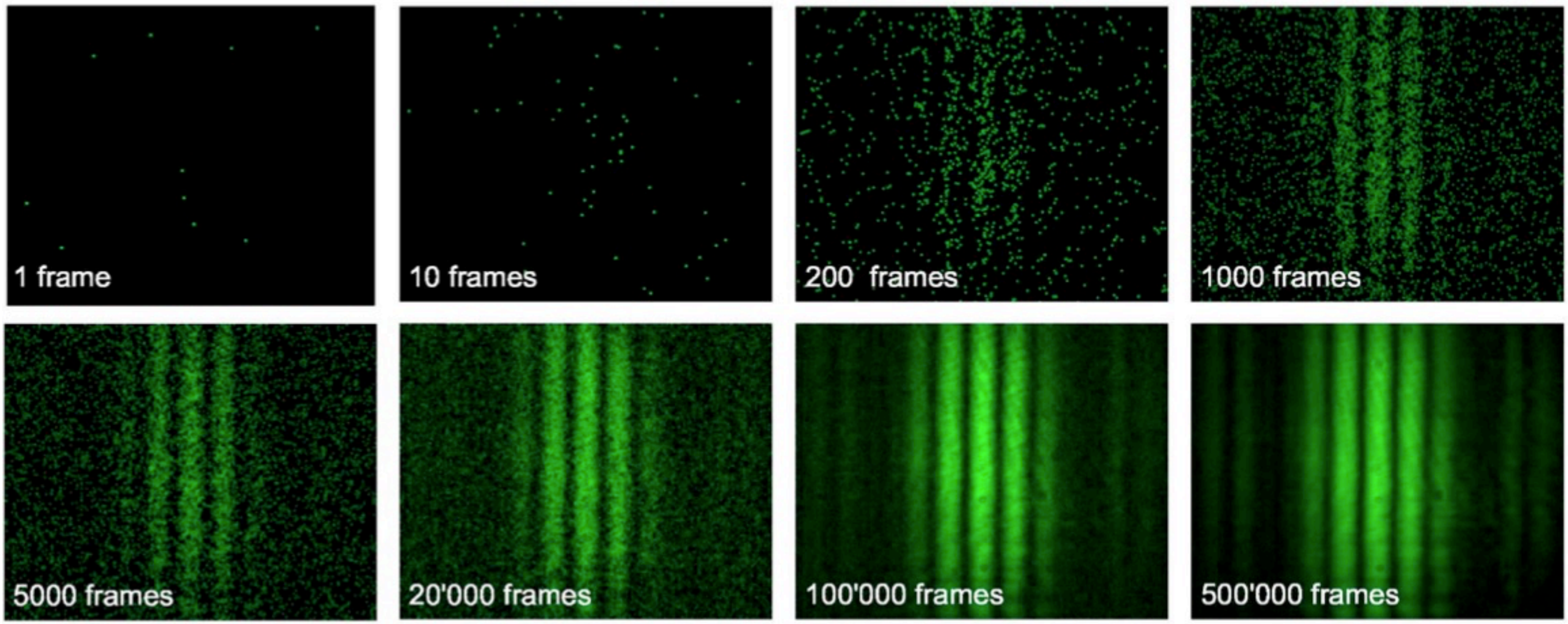
From "Foundations of Quantum Mechanics" by Travis Norsen, Springer 2017.

Interferenza di singolo elettrone



A. Tonomura *et al. Am. J. Phys.* 57(2), 117 (1989). Hanno usato un “biprisma” anziché una doppia fenditura.
In precedenza P. G. Merli, G. F. Missiroli and G. Pozzi. Am. J. Phys. 44, 306 (1976).

Interferenza di singolo fotone



T. L. Dimitrova and A. Weis. *Am. J. Phys.* 76, 137 (2008).

Molte particelle e stato entangled

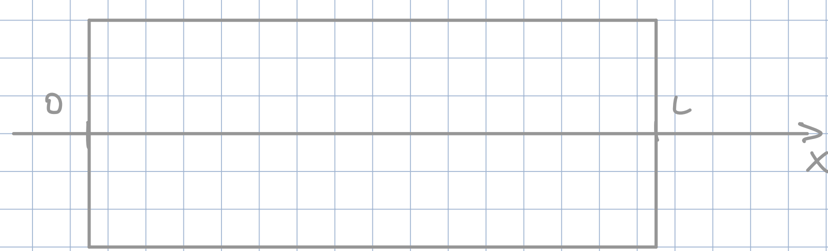
Per un sistema a N particelle non è vero, in generale, che ogni particella ha la sua funzione d'onda. C'è una sola funzione d'onda che descrive l'insieme delle N particelle, che obbedisce all'equazione:

$$\psi = \psi(x_1, x_2, \dots, x_N, t), \quad V = V(x_1, x_2, \dots, x_N)$$

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \sum_{i=1}^{N} \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\right) \nabla_i^2 \psi + V\psi$$

è nello spazio delle configurazioni.

Consideriamo il caso di due particelle in una scatola



$$V(x) = \begin{cases} 0 & , \quad 0 < x < L \\ \infty & , \quad \text{altrove} \end{cases}$$

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x_1, x_2, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x_1, x_2, t)}{\partial x_1^2} - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x_1, x_2, t)}{\partial x_2^2} +$$

$$+ V(x_1)\, \psi(x_1, x_2, t) + V(x_2)\, \psi(x_1, x_2, t)$$

Esistono soluzioni del tipo:

$$\Rightarrow \psi_{m,n}(x_1, x_2, t) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{m\pi x_1}{L}\right) \cdot \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x_2}{L}\right) e^{-i(E_m + E_n)t/\hbar}$$

prodotti delle autofunzioni delle particelle e dei fattori temporali.

Tuttavia questi stati non esauriscono tutte le possibilità del sistema.

Una funzione d'onda "entangled" (aggrovigliata) non è un prodotto.
In uno stato aggrovigliato le particelle non hanno, singolarmente, un loro stato individuale.

Esempio (sempre nella scatola)
Ignoriamo la dipendenza temporale ($t=0$).

Uno stato possibile è $\quad \psi_{1,2} = \psi_1(x_1)\,\psi_2(x_2)$

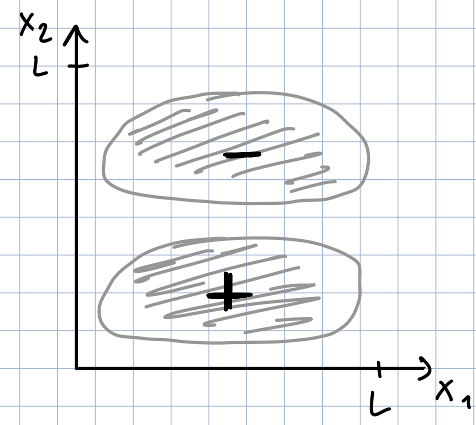
un secondo stato possibile è $\quad \psi_{2,1} = \psi_2(x_1)\,\psi_1(x_2)$

un altro può essere (STATO ENTANGLED)

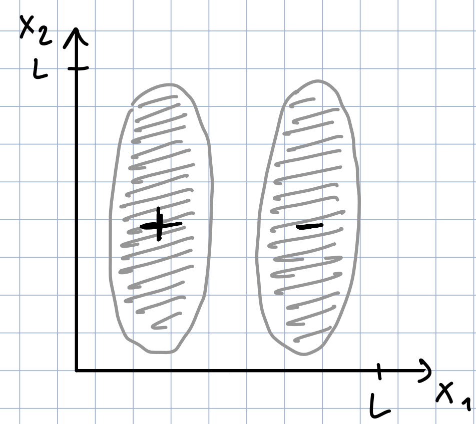
$$\psi_{ent} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_{1,2} + \psi_{2,1}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\psi_1(x_1)\,\psi_2(x_2) + \psi_2(x_1)\,\psi_1(x_2)\right]$$

Qui nessuna delle due particelle è in uno stato di energia definito, tuttavia l'energia totale è definita $E_1 + E_2$.
Non sappiamo come l'energia è distribuita tra le due particelle!

$$\Psi_{1,2} \sim \sin\left(\frac{\pi x_1}{L}\right) \sin\left(\frac{2\pi x_2}{L}\right)$$



$$\Psi_{2,1} \sim \sin\left(\frac{2\pi x_1}{L}\right) \sin\left(\frac{\pi x_2}{L}\right)$$



$$\Psi_{ent} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\Psi_{1,2} + \Psi_{2,1}\right)$$

⇒ è difficile trovare le particelle in posizioni diverse.

(si capisce considerando $|\Psi_{ent}|^2$)

Uno stato in cui:

- nessuna delle particelle ha un'energia definita
- nessuna delle particelle ha una posizione definita

Tuttavia

ci sono correlazioni tra le particelle: l'energia totale è definita ed è probabile che le particelle siano trovate una vicina all'altra!