

Fondamenti della Meccanica Quantistica

Giuseppe Pucci

anno accademico 2024-2025

lezione 4

EPR e disuguaglianza di Bell

LEZIONE 4 - EPR e Teorema di Bell

13-12-2024

EPR

Questi appunti contengono molto più materiale di quanto presentato a lezione

Einstein, Podolsky e Rosen (1935)

Einstein non vide l'articolo prima della pubblicazione e in alcune lettere successive mostrò il suo disappunto sul contenuto.

1.

Supponiamo che due particelle abbiano interagito formando uno stato entangled (aggrovigliato) e che adesso siano separate una dall'altra lungo le coordinate y .

Supponiamo che lo stato aggrovigliato sia:

$$\Psi(x_1, x_2) = \delta(x_1 - x_2) = \int \delta(x_1 - x) \delta(x_2 - x) dx$$

Misurando x_1 si può determinare x_2 . (a)

Criterio di realtà di EPR: (b)

Se possiamo determinare con certezza (cioè con probabilità uguale a 1) il valore di una quantità fisica senza disturbare il sistema allora esiste un elemento di realtà fisica che corrisponde a questa quantità fisica.

Questo criterio è sempre stato il punto focale delle contestazioni di Bohr e EPR.

(a) e (b) ci dicono che la particella 2 doveva avere già una posizione definita anche quando questa non le era attribuita dalla funzione d'onda subito prima della misura.

Questo ci porta a concludere che la funzione d'onda subito prima della misura non dava una descrizione completa dello

stato delle due particelle: le particelle 2 avere una posizione definite, ma la funzione d'onda non è lo dice.

$$2. \quad \Psi(x_1, x_2) = \delta(x_1 - x_2) = \frac{1}{2\pi} \int e^{ik(x_1 - x_2)} dk = \frac{1}{2\pi} \int e^{ikx_1} e^{-ikx_2} dk$$

$$\Rightarrow p_1 = -p_2$$

quindi è possibile determinare p_2 , senza disturbare le particelle 2, misurando p_1 . Insieme al criterio di realtà, questo ci dice che p_2 era già definito prima della misura, un'informazione non fornita dalla funzione d'onda.

Questo implica anche che nessuna funzione d'onda potrà fornire una descrizione completa del sistema, poiché non esiste una funzione d'onda che sia simultaneamente autofunzione della posizione e del momento.

Einstein su EPR

Einstein scrive che il punto principale che lui voleva porre non appariva chiaro nell'articolo.

Probabilmente era la LOCALITÀ, nascosta nel CRITERIO DI REALTÀ.

LOCALITÀ \Rightarrow CRITERIO DI REALTÀ di EPR

Inoltre

Einstein considerava l'incompletezza come il fallimento di una corrispondenza uno a uno tra elementi di realtà e descrizione teorica.

Inoltre Einstein:

(randomness)

(i) credere che la casualità della meccanica quantistica non sia inerente alla natura, ma il risultato dell'incompletezza delle teorie;

- (ii) pensare che una teoria futura potesse completare la descrizione quantistica e quindi restaurare il determinismo;
- (iii) credere nel principio di località per sostenere (i) e (ii).

(iii) era alla base di tutto, per lui. Il determinismo sarebbe stata una conseguenza.

Spin (dal cap. 2)

- spin su $\psi_{+z} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, spin giù $\psi_{-z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
 autovettori di $\hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Uno stato generico si può scrivere

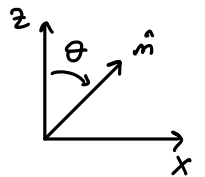
$$\psi = c_+ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_- \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_+ \\ c_- \end{pmatrix}$$

- lungo x

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_{+x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \psi_{-x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- operatore lungo una direzione arbitraria \hat{n} nel piano x-z:

$$\hat{\sigma}_n = \hat{n} \cdot \hat{\sigma} = \cos\theta \hat{\sigma}_z + \sin\theta \hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$



$$\psi_{+n} = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \end{pmatrix}, \quad \psi_{-n} = \begin{pmatrix} \sin(\theta/2) \\ -\cos(\theta/2) \end{pmatrix}$$

EPR ... Bohm

Stato di singoletto (con spin totale 0):

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\psi_{+z}^1 \psi_{-z}^2 - \psi_{-z}^1 \psi_{+z}^2 \right]$$

IL TEOREMA DI BELL

Rivisitazione di EPRB

$$\Psi_s = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\psi_{+z}^1 \psi_{-z}^2 - \psi_{-z}^1 \psi_{+z}^2 \right]$$

EPR dice che l'unico modo per evitare la non località è che la particella distante abbia un valore definito già prima delle misure.

$$\psi_{\pm x}^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\psi_{+z}^1 \pm \psi_{-z}^1 \right], \quad \psi_{\pm x}^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\psi_{+z}^2 \pm \psi_{-z}^2 \right]$$

$$\Rightarrow \Psi_s = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\psi_{+x}^1 \psi_{-x}^2 - \psi_{-x}^1 \psi_{+x}^2 \right]$$

HIDDEN VARIABLE THEORY, tabella

Coppie	Particella 1 x z	Particella 2 x z	Frequenze
1	{ +1, +1 }	{ -1, -1 }	25 %
2	{ +1, -1 }	{ -1, +1 }	25 %
3	{ -1, +1 }	{ +1, -1 }	25 %
4	{ -1, -1 }	{ +1, +1 }	25 %

⇒ La meccanica quantistica è incompleta.

$$\Psi_S = \frac{1}{2} \left[\Psi_{+x}^1 \Psi_{-z}^2 + \Psi_{-x}^1 \Psi_{-z}^2 - \Psi_{+x}^1 \Psi_{+z}^2 + \Psi_{-x}^1 \Psi_{+z}^2 \right]$$

con ogni risultato avente il 25% di probabilità di essere ottenuto.
 Così la nostra "teoria a variabili nascoste" riprodurrebbe i risultati della meccanica quantistica.

Commento a Carullo tra p. 217 e p. 218

Una disuguaglianza di Bell preliminare

Adesso supponiamo di misurare gli spin in direzioni arbitrarie, permettendo allo sperimentatore di scegliere tra 3 assi:

\hat{a} , \hat{b} e \hat{c} .

$$\Psi_S = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\Psi_{+a}^1 \Psi_{-a}^2 - \Psi_{-a}^1 \Psi_{+a}^2 \right]$$

$$\Psi_S = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\Psi_{+b}^1 \Psi_{-b}^2 - \Psi_{-b}^1 \Psi_{+b}^2 \right]$$

Tabella di possibile TEORIA A VARIABILI NASCOSTE

COPPIA	PARTICELLA 1 \hat{a} \hat{b} \hat{c}	PARTICELLA 2 \hat{a} \hat{b} \hat{c}	FREQUENZA
1	{ +1, +1, +1 }	{ -1, -1, -1 }	F_1
2	{ +1, +1, -1 }	{ -1, -1, +1 }	F_2
3	{ +1, -1, +1 }	{ -1, +1, -1 }	F_3
4	{ -1, +1, +1 }	{ +1, -1, -1 }	F_4
5	{ +1, -1, -1 }	{ -1, +1, +1 }	F_5
6	{ -1, +1, -1 }	{ +1, -1, +1 }	F_6
7	{ -1, -1, +1 }	{ +1, +1, -1 }	F_7
8	{ -1, -1, -1 }	{ +1, +1, +1 }	F_8

Bell dimostra che **è impossibile** che le statistiche F_1, \dots, F_8 ottenute da una teoria a variabili nascoste locali riproducano quelle della meccanica quantistica.

Egli mostra che le previsioni della teoria a variabili nascoste sono soggette a una certa disuguaglianza.

$P_{ab}(++)$

↑↑ ↑
_{1 2} particelle tutte e due le
 misure hanno dato spin su

$$P_{ab}(++) = F_3 + F_5, \quad P_{bc}(++) = F_2 + F_6, \quad P_{ac}(++) = F_2 + F_5$$

Poiché $\sum_i F_i = 1$, possiamo sempre scrivere

$$F_2 + F_5 \leq F_2 + F_5 + F_3 + F_6$$

$$\Rightarrow F_2 + F_5 \leq (F_3 + F_5) + (F_2 + F_6)$$

$$\Rightarrow P_{ac}(++) \leq P_{ab}(++) + P_{bc}(++)$$

La cosa incredibile è che è possibile scegliere $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}$ in modo tale che queste disuguaglianze sono violate dalle previsioni della meccanica quantistica. Consideriamo

$$\Psi_{+m} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \Psi_{+z} + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \Psi_{-z}$$

$$\Psi_{-m} = \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ -\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix} = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \Psi_{+z} - \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \Psi_{-z}$$

e invertiamo le per ottenere

$$\Psi_{+z} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \Psi_{+m} + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \Psi_{-m}$$

$$\Psi_{-z} = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \Psi_{+m} - \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \Psi_{-m}$$

$$\Rightarrow \Psi_S = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\sin \frac{\theta}{2} \Psi_{+z}^1 \Psi_{+m}^2 - \cos \frac{\theta}{2} \Psi_{+z}^1 \Psi_{-m}^2 - \cos \frac{\theta}{2} \Psi_{-z}^1 \Psi_{+m}^2 - \sin \frac{\theta}{2} \Psi_{-z}^1 \Psi_{-m}^2 \right]$$

(ottenute dall'espressione di singoletto $\Psi_S = \frac{1}{\sqrt{2}} [\Psi_{+z}^1 \Psi_{-z}^2 - \Psi_{-z}^1 \Psi_{+z}^2]$)

$$\Rightarrow P_{z,\theta}(++) = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{\theta}{2} \right|^2 = \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

Lo stato di singoletto è simmetrico (rispetto alle due particelle) e la scelta di z è arbitraria, per cui il risultato si può generalizzare.

Supponiamo di scegliere $\hat{b} = \hat{z}$ e \hat{a}, \hat{c} formanti un angolo θ rispetto a z , in direzioni opposte^(?):

$$P_{ab}^{NA}(++) = \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

$$P_{bc}^{NA}(++) = \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

$$P_{ac}^{NA}(++) = \frac{1}{2} \sin^2 \theta, \quad \text{poiché l'angolo tra } \hat{a} \text{ e } \hat{c} \text{ è } 2\theta.$$

Riscriviamo la disuguaglianza:

$$P_{ac}^{NA}(++) \leq P_{ab}^{NA}(++) + P_{bc}^{NA}(++)$$

$$\frac{1}{2} \sin^2 \theta \leq \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\theta}{2} + \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

non valida (!) per $\theta < \frac{\pi}{2}$

$$\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad \checkmark$$

$$\theta = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{8} \leq \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{2}{8} \quad \text{NO!}$$

MQ e la "teoria a variabili nascoste locali" forniscono previsioni diverse. La risposta agli esperimenti.

La disuguaglianza di Bell e la CHSH.

Bisogna pensare a un setup sperimentale in cui è impossibile, per le particelle, sapere in anticipo lungo quale asse il loro spin sarà misurato, in modo da rispettare rigorosamente la "località di Einstein".

Consideriamo il coefficiente di correlazione $C(\hat{m}_1, \hat{m}_2)$, definito come il valore atteso del prodotto dei risultati delle due misure lungo le direzioni \hat{m}_1, \hat{m}_2 .

$$C(\hat{m}_1, \hat{m}_2) = P_{m_1 m_2}(++) + P_{m_1 m_2}(--) - P_{m_1 m_2}(+-) - P_{m_1 m_2}(-+)$$

La predizione quantistica è:

$$C^{MQ}(\hat{m}_1, \hat{m}_2) = \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\theta}{2} + \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\theta}{2} - \frac{1}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{1}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} = -\cos \theta$$

dove θ è l'angolo tra \hat{m}_1 e \hat{m}_2 .

Per $\theta=0$, $C=-1$, cioè risultati anticorrelati.

Per $\theta = \frac{\pi}{2}$, $C=0$, cioè risultati scorrelati.

Nel caso delle teorie a variabili nascoste locali:

$$C(\hat{m}_1, \hat{m}_2) = P_{m_1 m_2}(++) + P_{m_1 m_2}(--) - P_{m_1 m_2}(+-) - P_{m_1 m_2}(-+)$$

Per esempio

$$C(\hat{a}, \hat{b}) = P_{ab}(++) + P_{ab}(--) - P_{ab}(+-) - P_{ab}(-+) =$$

$$= F_3 + F_5 + F_4 + F_6 - F_1 - F_2 - F_7 - F_8$$

oppure

$$C(\hat{a}, \hat{c}) = F_2 + F_5 + F_4 + F_7 - F_1 - F_3 - F_6 - F_8$$

$$C(\hat{b}, \hat{c}) = F_2 + F_3 + F_6 + F_7 - F_1 - F_4 - F_5 - F_8$$

Così per esempio

$$|F_3 + F_6 - F_7 - F_2| \leq F_2 + F_3 + F_6 + F_7$$

$$\Leftrightarrow |C(\hat{a}, \hat{b}) - C(\hat{a}, \hat{c})| \leq 1 + C(\hat{b}, \hat{c})$$

DISUGUAGLIANZA

DI BEU

e questa è la disuguaglianza di Bell inizialmente derivata da Bell stesso.

Questa è violata in meccanica quantistica, con misure violatorie per $\theta = \frac{\pi}{3}$, per cui

$$C^{NQ}(\hat{a}, \hat{b}) = -\cos(60^\circ) = -\frac{1}{2}$$

$$C^{NQ}(\hat{a}, \hat{c}) = -\cos(120^\circ) = \frac{1}{2}$$

$$C^{NQ}(\hat{b}, \hat{c}) = -\frac{1}{2} \Rightarrow 1 \leq \frac{1}{2} \quad \text{NO!}$$

Si può sviluppare un'altra disuguaglianza, simile alla prima:

$$|F_5 + F_4 - F_1 - F_8| \leq F_1 + F_4 + F_5 + F_8$$

$$\Leftrightarrow |C(\hat{a}', \hat{b}) + C(\hat{a}', \hat{c})| \leq 1 - C(\hat{b}, \hat{c})$$

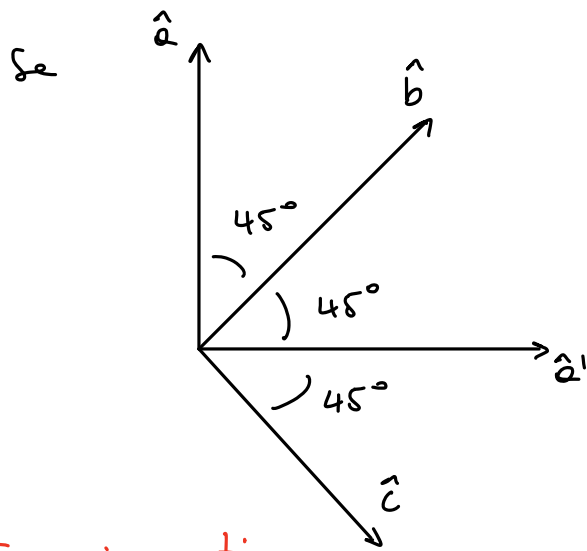
dove \hat{a}' può essere (o no) coincidente con \hat{a} .

Sommatale alla precedente otteniamo

$$|C(\hat{a}, \hat{b}) - C(\hat{a}, \hat{c})| + |C(\hat{a}', \hat{b}) + C(\hat{a}', \hat{c})| \leq 2$$

DISUGUAGLIANZA CHSH

Cluser, Horne, Shimony, Holt 1969



la meccanica quantistica restituisce, per il termine a sinistra delle CHSH, il valore $2\sqrt{2}$, che costituisce il valore massimo di violazione delle disuguaglianze secondo la RA.

Esperimenti

Primo test sistematico da parte di Alain Aspect e collaboratori nel 1982, usando coppie di fotoni con polarizzazioni approporzionate (entangled) in modo analogo allo stato di singoletto che abbiamo trattato.

Ottennero

$$CHSH_{exp} = 2.697 \pm 0.015 > 2 \quad \checkmark$$

Loopholes ("scappatoie") :

1) solo una frazione di dati può essere utilizzata (problema risolto in esperimenti futuri)

2) i sistemi di misura erano statistici (anche questo risolto successivamente).

Più recentemente ⁽²⁰¹⁵⁾ tutti i loopholes sono stati "chiusi" contemporaneamente in altri esperimenti.

Che vuol dire?

=> Le previsioni della meccanica quantistica sono corrette mentre quelle delle teorie a variabili nascoste locali non lo sono.

Testi alle pp. 231-236 [Diapositive 2,3,4 : la confusione di alcuni fisici e il punto di vista di Bell]

In my opinion, the most convincing argument against the theory of hidden variables was presented by J.S. Bell [10].

10. Wigner, Interpretation of quantum mechanics, in *Quantum Theory and Measurement*, ed. by Wheeler and Zurek (Princeton University Press, Princeton, 1983)

If people are obstinate in opposing the accepted view they can think of many new possibilities, but there is no sensible view of hidden variables which doesn't conflict with these experimental results [i.e., Aspect's experiments]. That was proved by John Bell, who has great merit in establishing this. Prior to that there was a proof due to the mathematician von Neumann, but he made an assumption which is not really necessary [11].

11. Interview with R. Peierls, in Davies and Brown, in *The Ghost in the Atom* (Cambridge, Cambridge University Press, 1993)

Einstein's view was what would now be called a hidden variable theory. Hidden variable theories might seem to be the most obvious way to incorporate the Uncertainty Principle into physics. They form the basis of the mental picture of the universe, held by many scientists, and almost all philosophers of science. But these hidden variable theories are wrong. The British physicist, John Bell ... devised an experimental test that would distinguish hidden variable theories. When the experiment was carried out carefully, the results were inconsistent with hidden variables. Thus it seems that even God is bound by the Uncertainty Principle.... God does play dice with the universe [12].

12. Hawking, Does god play dice? (1999), <http://www.hawking.org.uk/does-god-play-dice.html>

Could the apparent quantum randomness be replaced by some kind of unknown quantity carried out inside particles, so-called ‘hidden variables’? CERN theorist John Bell showed that in this case, quantities that could be measured in certain difficult experiments would inevitably disagree with standard quantum predictions. After many years, technology allowed researchers to conduct these experiments and eliminate hidden variables as a possibility [14].

14. Tegmark and Wheeler, 100 years of the quantum, in *Scientific American*, February 2001

he immediately dealt them [i.e., hidden variables] a major blow. In 1964 ... he showed that any hidden variables theory, which obeys Einstein’s requirement of locality, i.e., no influence travelling faster than the speed of light, would automatically be in conflict with quantum mechanics. [...] While a very tiny [experimental] loophole in principle remains for local realism, it is a very safe position to assume that quantum mechanics has definitely been shown to be the right theory. Thus, a very deep philosophical question, namely, whether or not events observed in the quantum world can be described by an underlying deterministic theory, has been answered by experiment, thanks to the momentous achievement of John Bell [15].

15. Bertlmann and Zeilinger, *Preface to Quantum [Un]speakables: From Bell to QUantum Information* (Springer, Berlin, 2002)

To those for whom nonlocality is anathema, Bell’s theorem finally spells the death of the hidden-variables program [16].

16. Mermin, Hidden variables and the two theorems of John Bell. *Rev. Modern Phys.* **65**, 803–815 (1993)

“It may well be that a relativistic version of [quantum] theory, while Lorentz invariant and local at the observational level, may be necessarily non-local and with a preferred frame (or aether) at the fundamental level” [19].

19. Bell, Quantum mechanics for cosmologists, in *Speakable and Unspeakable in Quantum Mechanics*, 2nd ed. (Cambridge, Cambridge University Press, 2004)

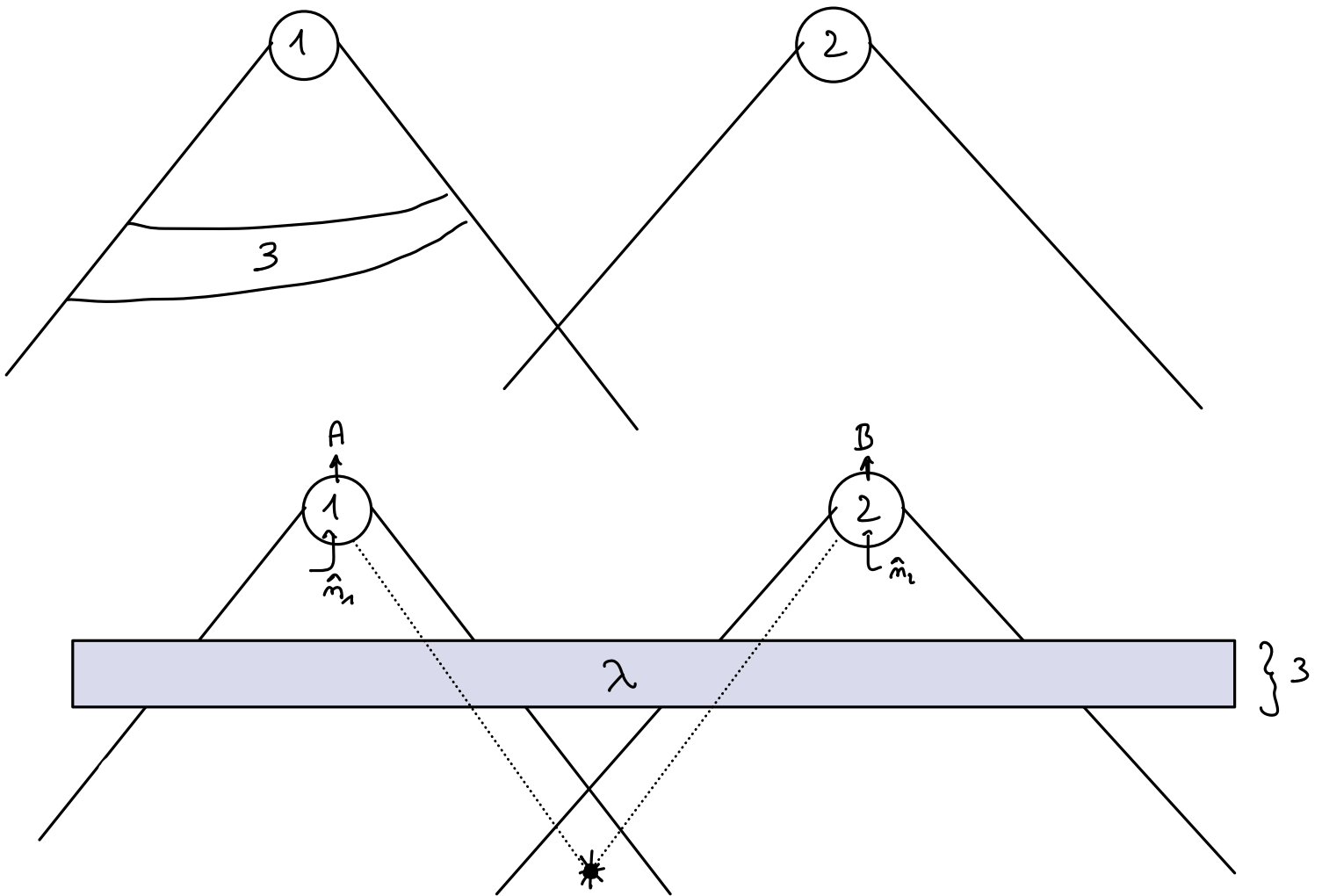
“... I would say the cheapest resolution is something like going back to relativity as it was before Einstein, when people like Lorentz and Poincaré thought that there was an aether – a preferred frame of reference – but that our measuring instruments were distorted by motion in such a way that we could not detect motion through the aether. Now, in that way you can imagine that there is a preferred frame of reference, and in this preferred frame of reference things do go faster than light. Behind the apparent Lorentz invariance of the phenomena, there is a deeper level which is not Lorentz invariant... [This] pre-Einstein position of Lorentz and Poincaré, Larmor and Fitzgerald, was perfectly coherent, and is not inconsistent with relativity theory. The idea that there is an aether, and these Fitzgerald contractions and Larmor dilations occur, and that as a result the instruments do not detect motion through the aether – that is a perfectly coherent point of view” [20].

20. Interview with J.S. Bell, in Davies and Brown, *The Ghost in the Atom* (Cambridge, Cambridge University Press, 1993)

“And his followers. My own first paper on this subject [i.e., Bell’s 1964 paper presenting “Bell’s theorem”] starts with a summary of the EPR argument *from locality to* deterministic hidden variables. But the commentators have almost universally reported that it begins with deterministic hidden variables” [21].

21. Bell, Bertlmann’s socks and the nature of reality, in *Speakable and Unspeakable in Quantum Mechanics*, 2nd ed. (Cambridge, Cambridge University Press, 2004)

Il Teorema della disuguaglianza per località di Bell
(Locality Inequality Theorem)



$$P(A, B | \hat{m}_1, \hat{m}_2, \lambda) = P(A | \hat{m}_1, \hat{m}_2, B, \lambda) \cdot P(B | \hat{m}_1, \hat{m}_2, \lambda)$$

↑
definizione
di probabilità
condizionata

$$= P(A | \hat{m}_1, \lambda) \cdot P(B | \hat{m}_2, \lambda)$$

↑
località
locale

Now suppose λ has a continuum spectrum of values
with probability density $\rho(\lambda)$

$$\begin{aligned}
C(\hat{m}_1, \hat{m}_2) &= \int \sum_{A,B} A \cdot B \cdot P(A, B | \hat{m}_1, \hat{m}_2, \lambda) \rho(\lambda) d\lambda = \\
&= \int \sum_{A,B} A \cdot B \cdot P(A | \hat{m}_1, \lambda) \cdot P(B | \hat{m}_2, \lambda) \rho(\lambda) d\lambda = \\
&= \int \left[\sum_A A \cdot P(A | \hat{m}_1, \lambda) \right] \left[\sum_B B \cdot P(B | \hat{m}_2, \lambda) \right] \rho(\lambda) d\lambda = \\
&= \int \bar{A}(\hat{m}_1, \lambda) \bar{B}(\hat{m}_2, \lambda) \rho(\lambda) d\lambda
\end{aligned}$$

dove $\bar{A}(\hat{m}_1, \lambda) = \sum_A A \cdot P(A | \hat{m}_1, \lambda)$ è il valore medio di A ,
e similmente per B .

$$|\bar{A}(\hat{m}_1, \lambda)| \leq 1, \quad |\bar{B}(\hat{m}_2, \lambda)| \leq 1$$

Per derivare la disuguaglianza CHSH consideriamo

$$C(\hat{a}, \hat{b}) - C(\hat{a}, \hat{c}) = \int \bar{A}(\hat{a}, \lambda) [\bar{B}(\hat{b}, \lambda) - \bar{B}(\hat{c}, \lambda)] \rho(\lambda) d\lambda$$

$$\Rightarrow |C(\hat{a}, \hat{b}) - C(\hat{a}, \hat{c})| \leq \int |\bar{B}(\hat{b}, \lambda) - \bar{B}(\hat{c}, \lambda)| \rho(\lambda) d\lambda$$

$$\text{e } |C(\hat{a}', \hat{b}) + C(\hat{a}', \hat{c})| \leq \int |\bar{B}(\hat{b}, \lambda) + \bar{B}(\hat{c}, \lambda)| \rho(\lambda) d\lambda$$

sommando le ultime due si ottiene la CHSH:

$$|C(\hat{a}, \hat{b}) - C(\hat{a}, \hat{c})| + |C(\hat{a}', \hat{b}) + C(\hat{a}', \hat{c})| \leq 2 \quad \checkmark$$

La teoria cometa deve violare la causalità locale.

La Natura la viola, cioè esistono relazioni causali che viaggiano a una velocità maggiore di quella della luce.

Infatti Bell lo chiamare "LOCALITY INEQUALITY THEOREM".