LEZIONE 2 | BIFORCAZIONI (cap. 3 del libro) 17/10/2024

$n = 1$, dinamica banale: o si raggiunge l'equilibrio o si tende all'infinito.

Cosa è interessante nei sistemi MONODIMENSIONALI? La DIPENDENZA DAI PARAMETRI.

I punti fissi possono cambiare o può cambiare la loro stabilità, in seguito a BIFORCAZIONI che avvengono per certi valori dei parametri che sono chiamati PUNTI DI BIFORCAZIONE.

BIFORCAZIONI descrivono → TRANSIZIONI
→ INSTABILITÁ

in funzione di un PARAMETRO DI CONTROLLO

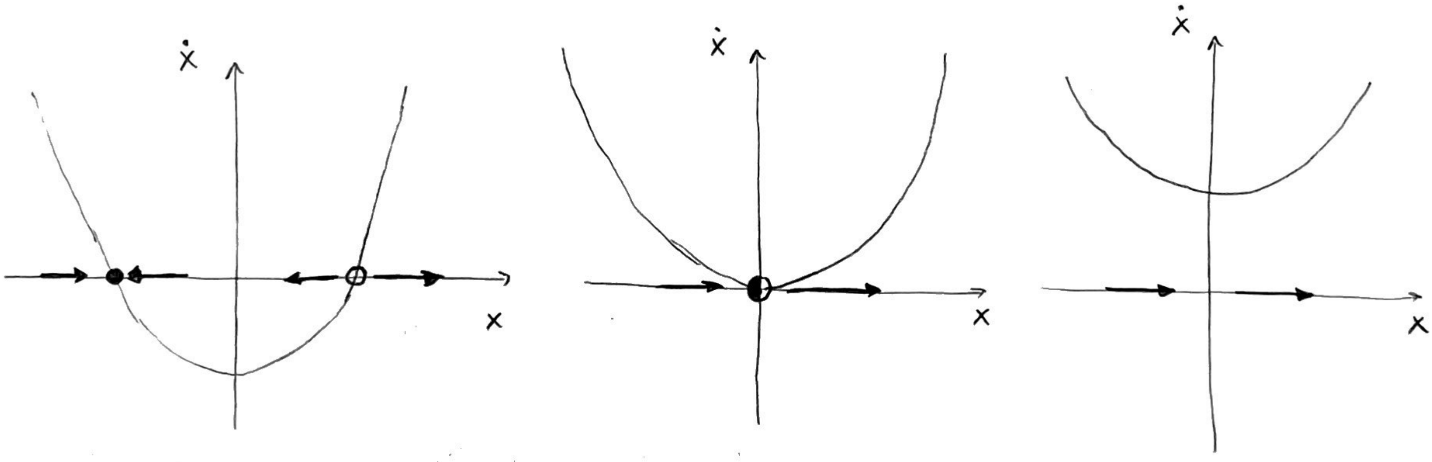
ES. (visivo) del bastoncino che si piega.

---

BIFORCAZIONE A NODO SELLA

E' il meccanismo di base con cui punti fissi sono creati o distrutti.

$$\dot{x} = r + x^2$$

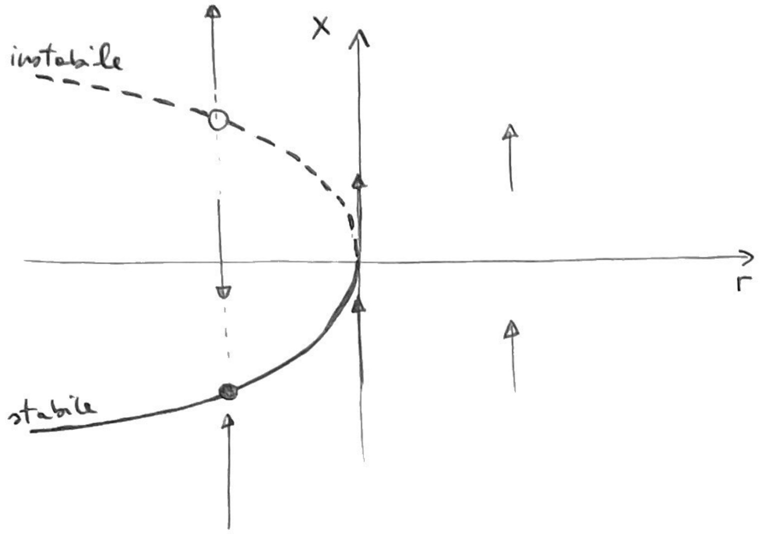


$r<0$ $r=0$ $r>0$

la biforcazione avviene qui

perché i campi vettoriali per $r<0$ e $r>0$ sono qualitativamente diversi

• DIAGRAMMA DI BIFORCAZIONE




$\dot{x} = r + x^2$

$\dot{x} = 0 \Rightarrow r = -x^2$

"biforcazione": divisione in due rami

ES. Analisi di stabilità lineare

$\dot{x} = r - x^2$ , $f(x) = r - x^2$

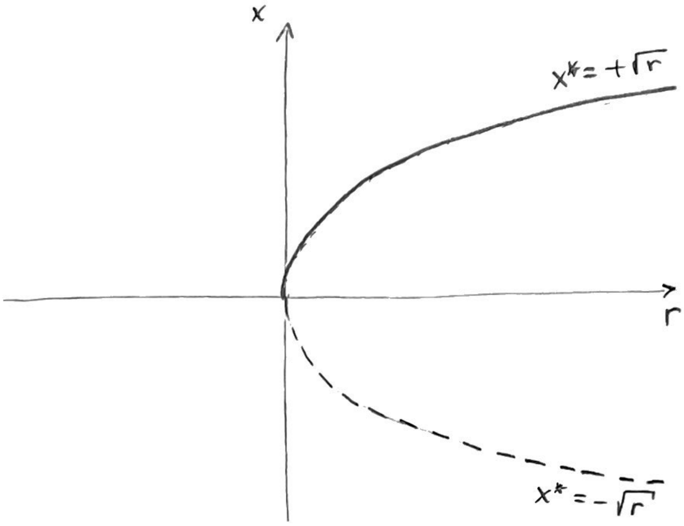
altro modo di vedere la biforcazione

$f'(x) = -2x$

$\dot{x} = 0 \Rightarrow x^* = \pm\sqrt{r}$

$r > 0$ due punti fissi

$r < 0$ nessun punto fisso




$f'(+\sqrt{r}) = -2\sqrt{r} < 0$ stabile

$f'(-\sqrt{r}) = 2\sqrt{r} > 0$ instabile

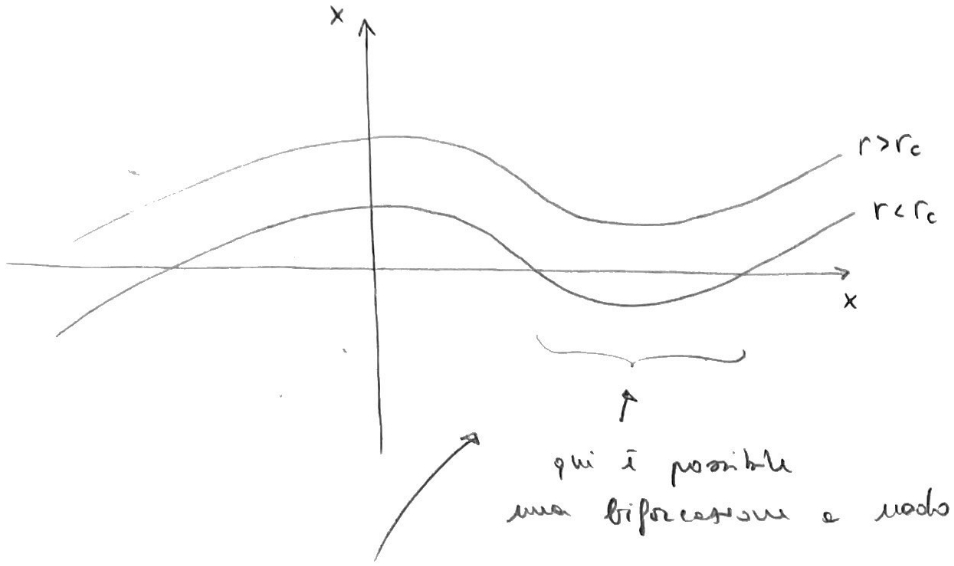
$r = 0 \Rightarrow f'(x^*) = 0$ la linearizzazione svanisce quando i punti fissi si fondono.

• FORME NORMALI

$\dot{x} = r - x^2$ , $\dot{x} = r + x^2$ rappresentano, in un certo senso, tutte le biforcazioni a nodo sella.

OSS. Vicino a una biforcazione a nodo sella la dinamica assomiglia sempre a uno di questi due sistemi.

Come possono due punti fissi di $\dot{x} = f(x)$ collidere e sparire variando un parametro di controllo $r$?




qui è possibile una biforcazione a nodo sella: serve una $f(x)$ che localmente si avvicini a una parabola.

effettivamente, qui $f(x)$ si può approssimare con una parabola

Analiticamente,

$\dot{x} = f(x, r)$ vicino la biforcazione a $x = x^*$ e $r = r_c$

Espandendo in serie di Taylor

$$\dot{x} = f(x,r) = f(x^*, r_c) + (x - x^*) \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x^*, r_c} + (r - r_c) \left.\frac{\partial f}{\partial r}\right|_{x^*, r_c} + \frac{1}{2}(x - x^*)^2 \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{x^*, r_c} + \dots$$

$f(x^*, r_c) = 0$ perché $x^*$ è un punto fisso

$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x^*, r_c} = 0$ per la condizione di tangenza (tangente orizzontale) di una biforcazione a nodo sella.

$$\Rightarrow \quad \dot{x} = a(r - r_c) + b(x - x^*)^2 + \dots$$

con $a = \left.\frac{\partial f}{\partial r}\right|_{x^*, r_c}$, $b = \frac{1}{2} \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{x^*, r_c}$, $a, b \neq 0$

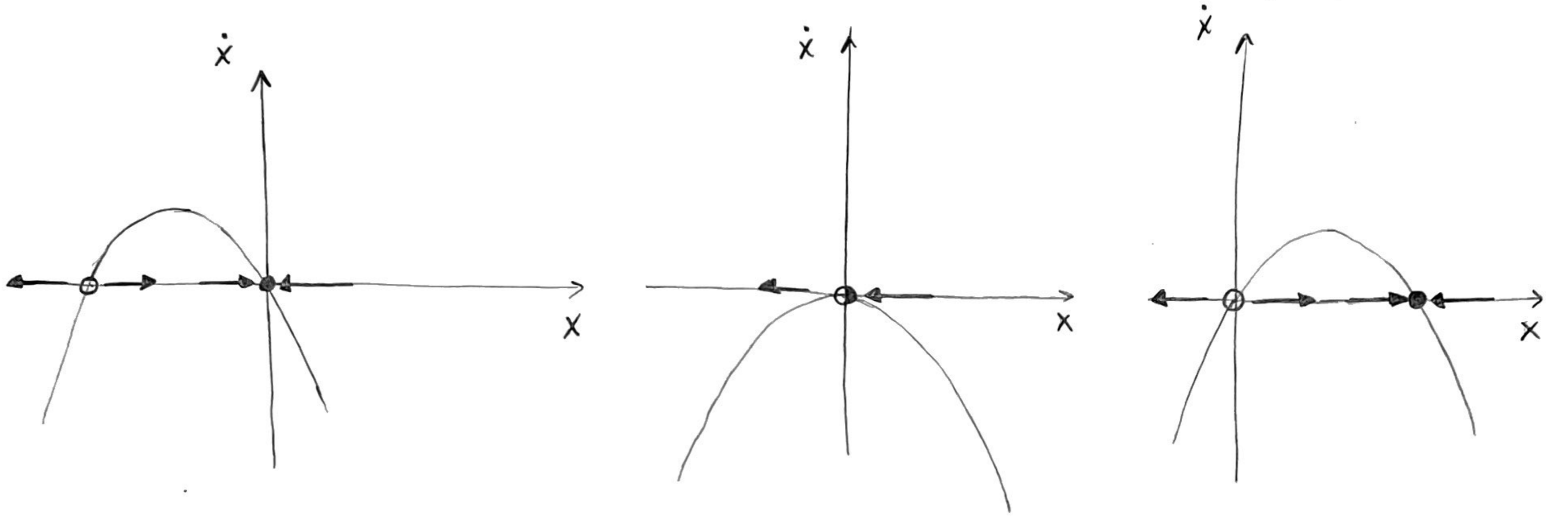
compatibile con le FORME NORMALI $\dot{x} = r - x^2$, $\dot{x} = r + x^2$ della biforcazione a nodo sella.

# BIFORCAZIONE TRANSCRITICA

Un punto fisso esiste sempre ma cambia la sua stabilità.

$$\dot{x} = rx - x^2$$

OSS. somigliante con l'equazione logistica, ma più generale

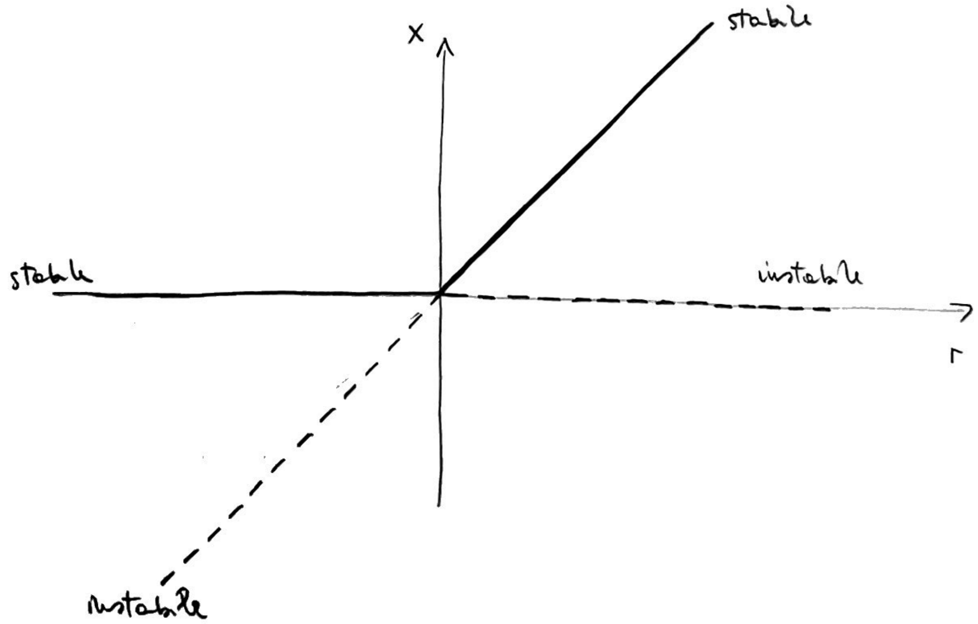



$r<0$ $r=0$ $r>0$

$$\dot{x} = x(r-x)$$

OSS. C'è almeno un punto fisso $x^*$ $\forall r$

Differenza con la biforcazione a nodo sella: qui i due punti non scompaiono alla biforcazione, ma si scambiano la loro stabilità.



ES. Il sistema del primo ordine $\dot{x} = x(1-x^2) - a(1-e^{-bx})$ esibisce una biforcazione transcritica?

$x^* = 0$ è un punto fisso $\forall (a,b)$, cosa che lo rende un buon candidato per biforcare.

Per $x \ll 1$, $1 - e^{-bx} = 1 - \left(1 - bx + \frac{1}{2} b^2x^2 + O(x^3)\right) =$

Taylor

$$= bx - \frac{1}{2} b^2 x^2 + O(x^3)$$

$$\Rightarrow \dot{x} = x - a\left(bx - \frac{1}{2} b^2x^2 + O(x^3)\right) =$$

$$= (1-ab)x + \frac{1}{2}ab^2x^2 + O(x^3)$$

$\Rightarrow$ biforcazione transcritica quando $ab = 1$

Il punto fisso $x^* \neq 0$?

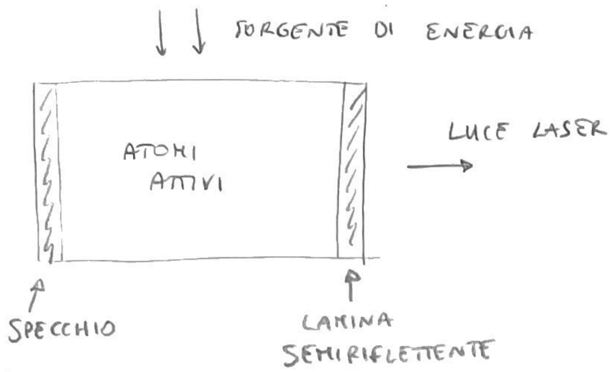
$$\dot{x} = x\left(1 - ab + \frac{1}{2}ab^2x\right) + O(x^3)$$

$$x^* \simeq -2\,\frac{1-ab}{ab^2}$$

formula approssimativamente corretta solo se $x^*$ è piccolo, quindi con $ab \approx 1$.

- La teoria delle forme normali ci garantisce che possiamo sempre trovare una forma $\dot{x} = rx - x^2$ (tramite sviluppi in serie, cambi di variabile, ...)

# ESEMPIO FISICO : SOGLIA DEL LASER (Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation)




- sorgente a bassa energia → il sistema si comporta come una lampada; gli atomi, eccitati, emettono luce in maniera casuale
- al di sopra di una certa energia della sorgente gli atomi cominciano a oscillare in fase → laser, luce più intensa e coerente

è un fenomeno di auto-organizzazione del sistema.

Si potrebbe dire che gli atomi cooperano.

$n(t)$ numero di fotoni nel campo del laser

$$\dot{n} = \text{guadagno} - \text{perdite}$$

$$= G\,n\,N - k\,n$$

emissione stimolata

fuga dei fotoni dai lati del laser

$\tau = \frac{1}{k}$ tempo di vita tipico di un fotone nel laser

$N(t)$ numero di atomi eccitati

$G > 0$ coefficiente di guadagno

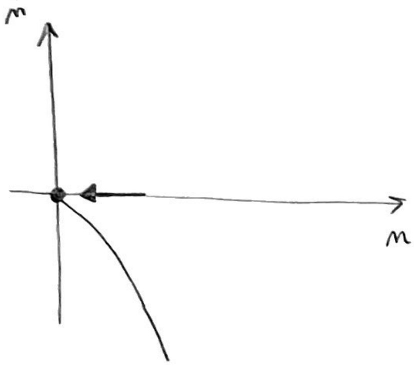
- Idea fisica chiave: dopo che un atomo eccitato emette un fotone, ricade ad un livello di energia inferiore, non eccitato.

$$\Rightarrow \quad N(t) = N_0 - \alpha n \quad , \qquad \alpha > 0 \text{ è il rate a cui gli atomi ritornano allo stato fondamentale}$$

$N_0$: numero di atomi eccitati in assenza di effetto laser

$$\Rightarrow \dot{m} = Gm\left(N_0 - \alpha m\right) - Km =$$
$$= \left(GN_0 - K\right)m - \alpha G m^2$$

sistema del 1° ordine per $m(t)$

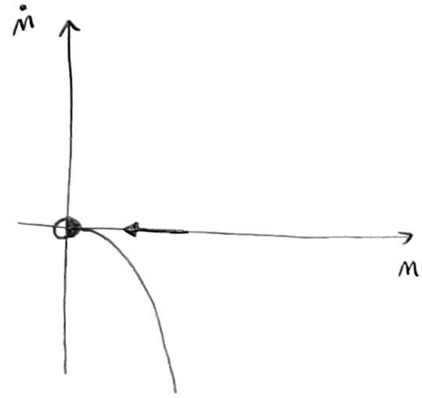



$GN_0 - K < 0$

$N_0 < \frac{K}{G}$

$m^* = 0$ stabile

non c'è emissione stimolata, il laser agisce come una lampada



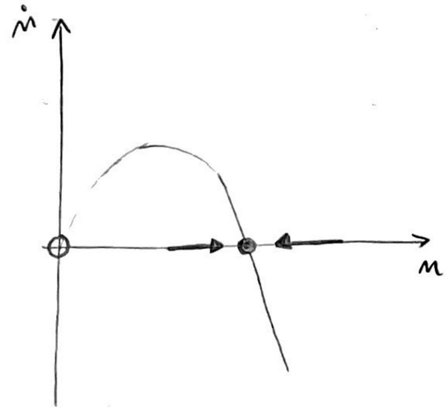

$N_0 = \frac{K}{G}$

qui avviene la biforcazione transcritica, aumentando $N_0$

↑

SOGLIA DEL LASER

$N_0 = \frac{K}{G}$

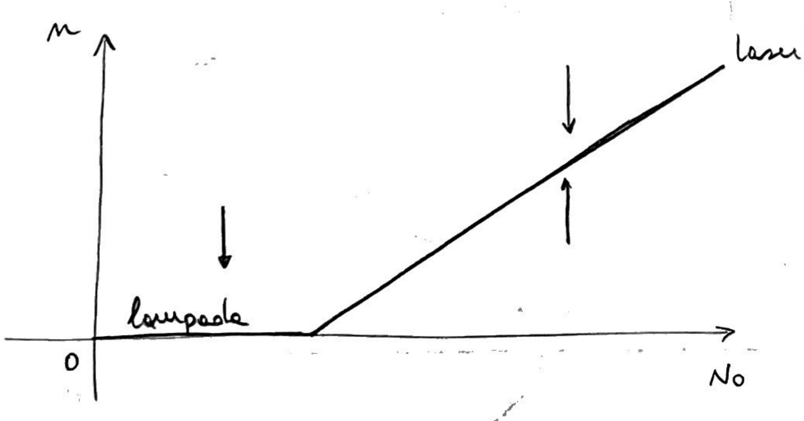



$N_0 > \frac{K}{G}$

l'origine non è più stabile

$\dot{m} = m\left(GN_0 - K - \alpha G m\right)$

$m^* = \frac{GN_0 - K}{\alpha G}$




note : è un modello molto semplificato che ignora diversi fenomeni fisici.

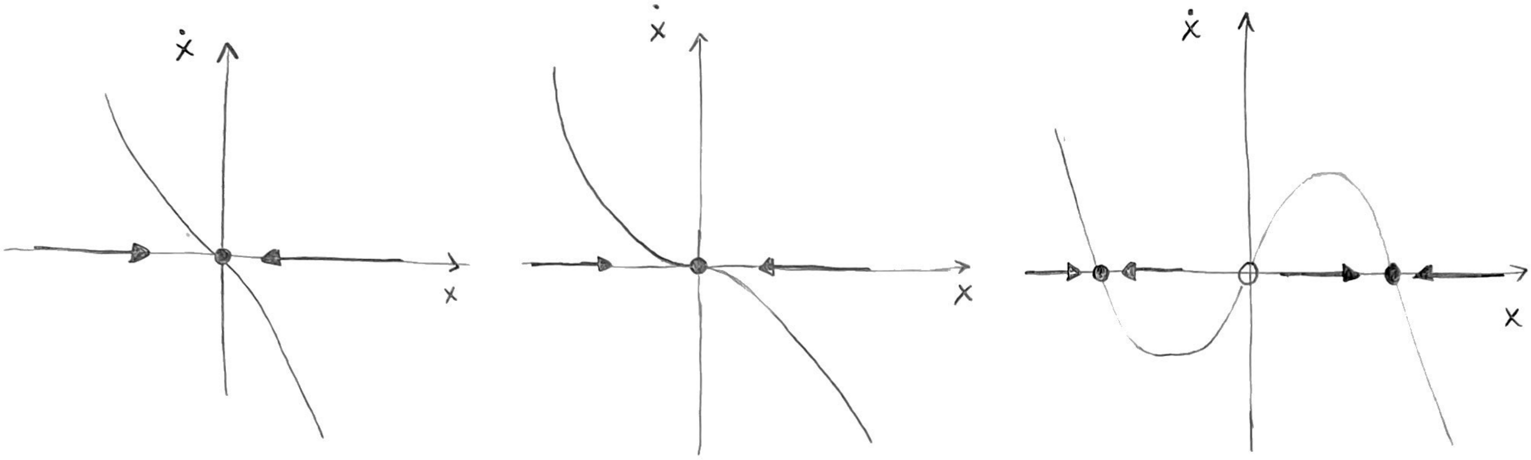
# BIFORCAZIONE A FORCONE

Tipica di problemi con simmetria. Esempio del bastoncino verticale che, sotto l'effetto di un peso, si piega o a destra o a sinistra.

Ci sono due tipi di biforcazioni a forcone: supercritiche e subcritiche.

- Biforcazione a forcone SUPERCRITICA

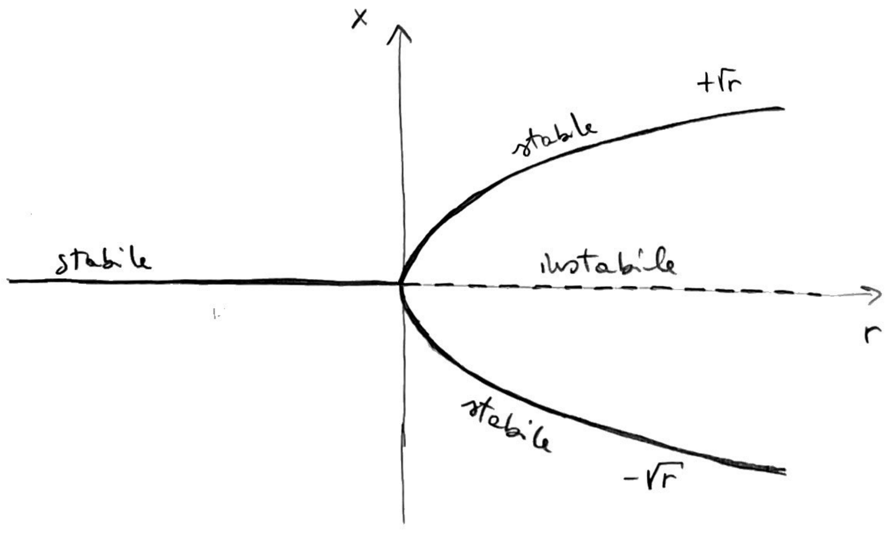
$\dot{x} = rx - x^3$ forma normale, invariante per scambio $x \rightarrow -x$ (simmetria)




$r<0$ $r=0$ $r>0$

Qui $x^*$ è stabile, ma debolmente. Le soluzioni non decadono più esponenzialmente e si parla di RALLENTAMENTO CRITICO.

$x^* = \pm\sqrt{r}$



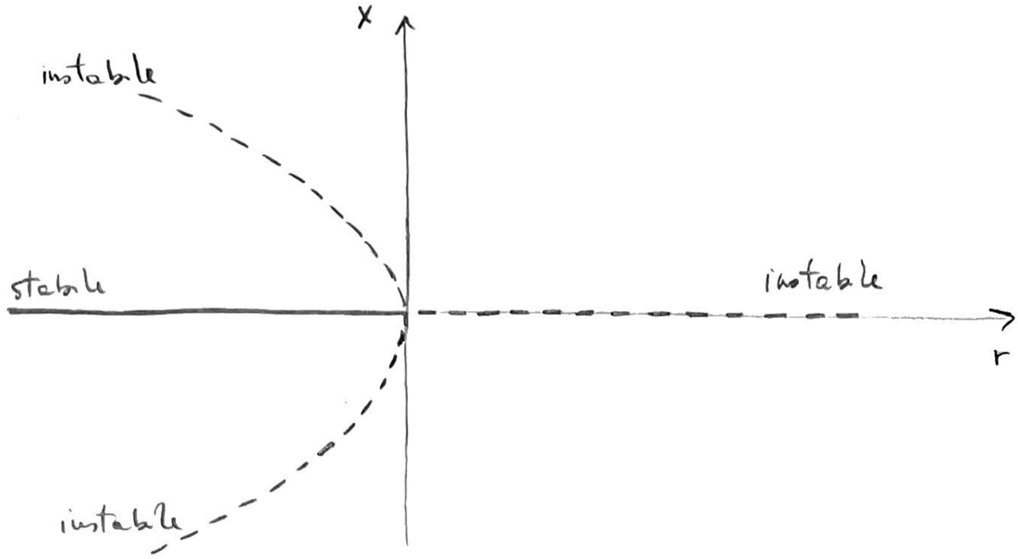

OSS. In $\dot{x} = rx - x^3$ il termine $-x^3$ è stabilizzante, agisce come una forza di richiamo che "tira indietro" $x(t)$ verso $x=0$.

ES. (live) INSTABILITÁ DI FARADAY, ROTTURA DI SIMMETRIA di BOUNCER e WALKER

- Biforcazione a forcone SUBCRITICA

Con il termine cubico destabilizzante

$$\dot{x} = rx + x^3$$



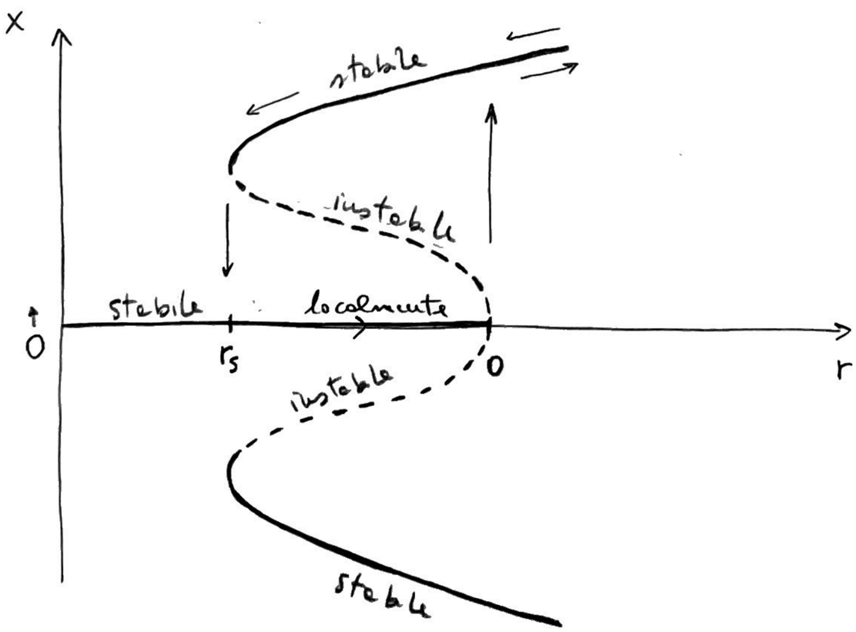

$x^* = \pm\sqrt{r}$
instabili

In sistemi fisici reali, un'instabilità così "esplosiva" è solitamente compensata da termini di ordine superiore.

Volendo mantenere la simmetria $x \to -x$, il nuovo sistema sarà

$$\dot{x} = rx + x^3 - x^5$$

NOTA: Non si perde generalità assumendo che i coefficienti di $x^3$ e $-x^5$ siano entrambi 1.




Per x piccolo, il grafico assomiglia a quello di

$$\dot{x} = rx + x^3$$

Per un $r_s < 0$, i rami instabili curvano e diventano stabili. Questi rami stabili esistono per ogni $r > r_s$ e per GRANDI "AMPIEZZE" x.

1. Nell' intervallo $r_s < r < 0$ COESISTONO due stati stabili qualitativamente diversi. E' la condizione iniziale $x_0$ che determina su quale punto fisso si attesterà il sistema per $t \to \infty$.

L'origine è stabile alle piccole perturbazioni, ma non alle grandi: si dice che è LOCALMENTE STABILE.

2. La coesistenza di diversi stati stabili permette che esistano SALTI e ISTERESI, al variare di r.

$\uparrow$

irreversibilità al variare di r.

3. La biforcazione a $r = r_s$ è una biforcazione a NODO SELLA, poiché punti fissi stabili e instabili sono creati "improvvisamente"!

OSS. La biforcazione a forcone supercritica è legata alle transizioni di fase del secondo ordine in meccanica statistica.
(continue)

La biforcazione a forcone subcritica è legata alle transizioni di fase discontinue o del primo ordine.

Esercizi per casa.

BIFORCAZIONI A FORCONE

1) $\dot{x} = rx + x^3$, $r>0$ fissato. Mostrare che $x(t) \to \pm\infty$ in un tempo finito, partendo da qualsiasi condizione iniziale $x_0 \neq 0$

2) $\dot{x} = rx + x^3 - x^5$

a) Trovare le espressioni algebriche per i punti fissi al variare di r.

b) Disegnare i campi vettoriali al variare di r, facendo emergere tutti i punti fissi e la loro stabilità.

c) Calcolare l' $r = r_s$ per cui i punti fissi $x^* \neq 0$ emergono in conseguenza di una biforcazione a nodo sella.

3) Transizione di fase del 1° ordine.

Consideriamo il potenziale $V(x)$ del sistema $\dot{x} = rx + x^3 - x^5$.

Calcolare $r_c$ / $V(x)$ abbia tre valli di uguale profondità.