

Giuseppe Pucci

giuseppe-pucci@cmr.it

www.gpucci.net

LIBRO: "Nonlinear Dynamics and Chaos" di Steven H. Strogatz

Metodo: lezioni frontali alla lavagna, con esercizi da svolgere da parte degli studenti in classe e a casa.

STORIA DELLA DINAMICA

- proiezione slide p. 5 del libro

→ Problema dei tre corpi impossibile da risolvere analiticamente

→ Poincaré inizio a porsi domande sulla STABILITÀ dei sistemi planetari antichi sulle loro posizioni esatte.

↳ 1890s approccio geometrico → alta sensibilità alle condizioni iniziali, quindi il CAOS.

↳ comprensione più profonda della meccanica classica

→ 1950s computer

→ 1963 Lorentz: caos (ma con una struttura)

→ 1970s Feigenbaum: leggi universali per la transizione al caos
↳ legame con le transizioni di fase

SISTEMI DINAMICI

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

continuità del tempo

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0 \quad \text{oscillatore armonico smorzato}$$

MAPPE ITERATIVE

tempo discreto

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{equazione del calore}$$

→ qui ci concentriamo su questo tipo, cioè sulla sola dipendente temporale

Dynamics — A Capsule History

1666	Newton	Invention of calculus, explanation of planetary motion
1700s		Flourishing of calculus and classical mechanics
1800s		Analytical studies of planetary motion
1890s	Poincaré	Geometric approach, nightmares of chaos
1920–1950		Nonlinear oscillators in physics and engineering, invention of radio, radar, laser
1920–1960	Birkhoff	Complex behavior in Hamiltonian mechanics
	Kolmogorov	
	Arnol'd	
	Moser	
1963	Lorenz	Strange attractor in simple model of convection
1970s	Ruelle & Takens	Turbulence and chaos
	May	Chaos in logistic map
	Feigenbaum	Universality and renormalization, connection between chaos and phase transitions
		Experimental studies of chaos
	Winfree	Nonlinear oscillators in biology
	Mandelbrot	Fractals
1980s		Widespread interest in chaos, fractals, oscillators, and their applications

Approccio generale alle equazioni differenziali ordinarie:

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, \dots, x_n)$$

⋮

$$\dot{x}_n = f_n(x_1, \dots, x_n)$$

SISTEMA

ES. $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$

$$\begin{aligned} x_1 = x \\ x_2 = \dot{x} \end{aligned} \Rightarrow \dot{x}_1 = x_2 ; \quad \ddot{x} = -\frac{b}{m}\dot{x} - \frac{k}{m}x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{b}{m}x_2 - \frac{k}{m}x_1 \end{cases}$$

LINEARE perché tutte le x_i a destra compaiono con esponente 1.

Altrimenti il sistema si direbbe **NON LINEARE**.

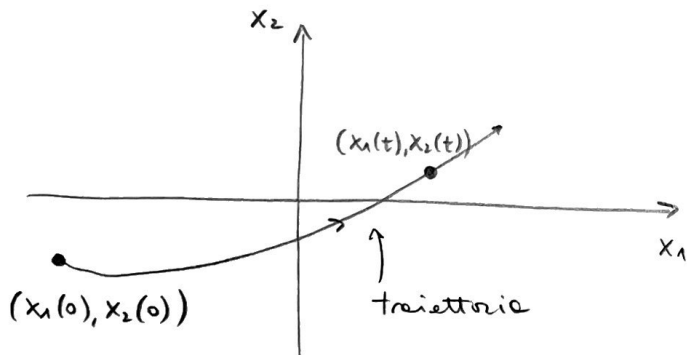
ES. $\ddot{x} + \frac{g}{L} \sin x = 0$, pendolo, x : angolo con la verticale

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{g}{L} \sin x_1 \end{cases}$$

NON LINEARE, difficile da risolvere analiticamente

ma con le tecniche di dinamica non lineare sapremo estrarre molte informazioni sulla fisica del sistema.

In che modo? Usando lo SPAZIO DELLE FASI: disegnando le traiettorie estraiamo informazioni sulle soluzioni.



→ Il ragionamento GEOMETRICO ci permetterà di disegnare le traiettorie senza risolvere analiticamente il sistema.

NOTA Il sistema

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, \dots, x_n)$$

⋮

$$\dot{x}_n = f_n(x_1, \dots, x_n)$$

è detto "n-dimensionale" o "di ordine n"

- SISTEMI NON AUTONOMI, in cui \dot{x} presenta una dipendenza esplicita dal tempo.

ES. $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F\cos t$

$$x_1 = x$$

$$x_2 = \dot{x}$$

$$x_3 = t \Rightarrow \dot{x}_3 = 1$$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{m} (-kx_1 - bx_2 + F\cos x_3)$$

$$\dot{x}_3 = 1$$

Questo cambio di variabile ci fa visualizzare traiettorie CONGELATE nello spazio delle fasi

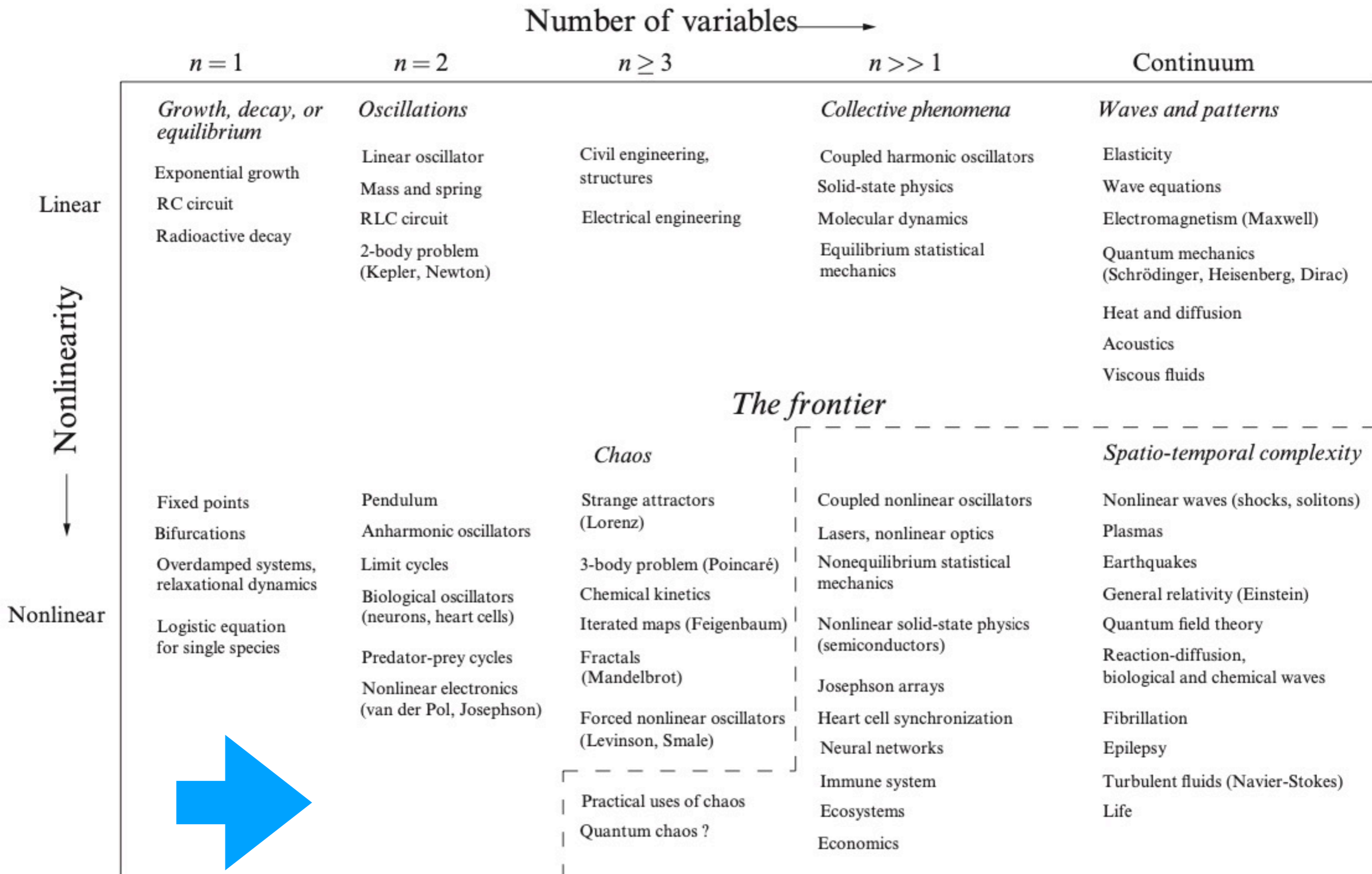
Fisicamente il cambio di variabile ha senso se si considera che l'oscillatore armonico forzato sommato richiede 3 numeri (x, \dot{x}, t) per prevedere il futuro una volta noto il presente.

mostra slide 2 : prospetto dinamico del mondo fisico.

- parte in alto e destra del prospetto:

equazioni alle derivate parziali che coinvolgono un "continuo" infinito di variabili poiché ogni punto dello spazio aggiunge gradi di libertà; trattabili soprattutto grazie alle trasformate di Fourier e altre trasformate.

PROSPETTO DINAMICO DEL MONDO FISICO



FLUSSI LUNGO UNA LINEA (Cap. 2 del libro)

$$n = 1, \quad \dot{x} = f(x)$$

TERMINOLOGIA: per "sistema" si intende "sistema dinamico" o "sistema di equazioni"

METODO della DINAMICA

Interpretare un'equazione differenziale come un campo vettoriale

ES. $\dot{x} = \sin x$

$$\frac{dx}{dt} = \sin x; \quad dt = \frac{dx}{\sin x}; \quad t = \int \operatorname{cosec} x \, dx = -\ln |\operatorname{cosec} x + \cotan x| + C$$
$$= -\ln \left| \frac{1}{\sin x} + \frac{\cos x}{\sin x} \right| + C$$

→ not necessary

$$= -\ln \left| \frac{1 + \cos x}{\sin x} \right| + C$$

e $x(0) = x_0$ allora $C = \ln \left| \frac{1 + \cos x_0}{\sin x_0} \right| = \ln |\operatorname{cosec} x_0 + \cotan x_0|$

$$\Rightarrow t = \ln \left| \frac{\operatorname{cosec} x_0 + \cotan x_0}{\operatorname{cosec} x + \cotan x} \right| \quad \text{risultato esatto.}$$

Domande

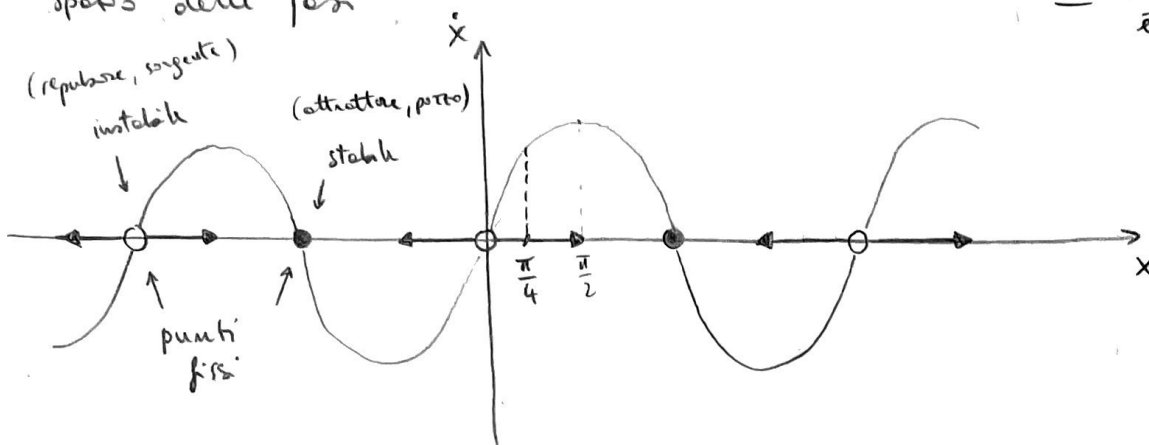
1. Supponiamo che $x_0 = \frac{\pi}{4}$ quali sono le caratteristiche di $x(t)$ per $t > 0$? Cosa succede quando $t \rightarrow \infty$?

2. Per una condizione iniziale arbitraria x_0 qual è il comportamento di $x(t)$ per $t \rightarrow \infty$?

⇒ Il risultato, seppur esatto, è difficile da interpretare!

Nello spazio delle fasi

oss. $\dot{x} = -\sin x$
 \bar{x} è il pendolo semplice



$\dot{x} = \sin x$ rappresenta un campo vettoriale sulle linee: mi dice
 \uparrow
 def.

il vettore velocità \dot{x} \forall x .

RISPOSTE

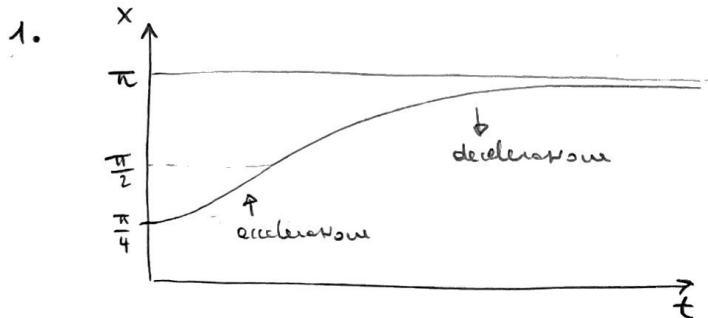


grafico qualitativo

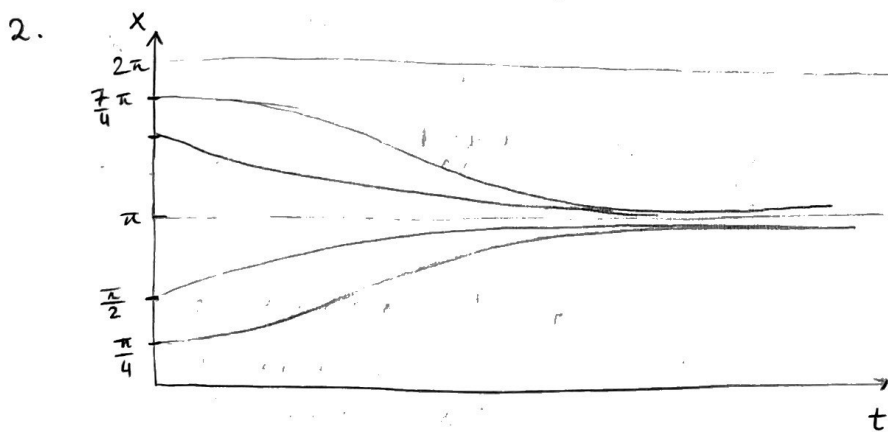
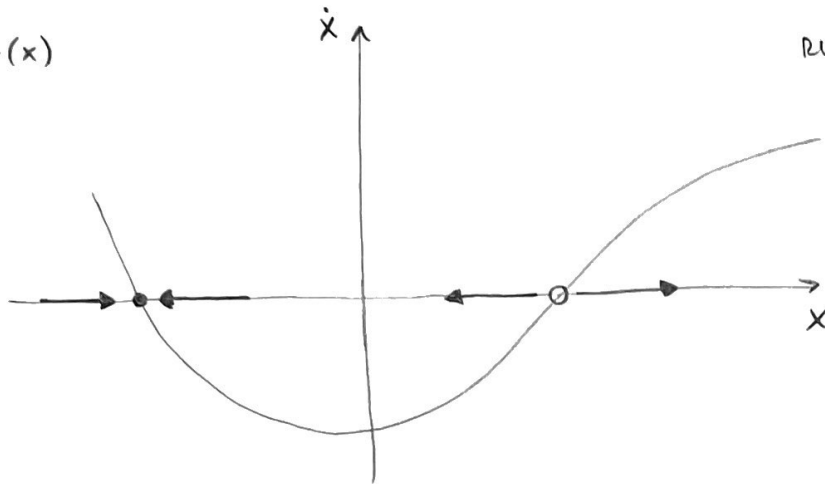


grafico qualitativo

oss. Non abbiamo informazioni quantitative.

PUNTI FISSI E STABILITÀ

$$\dot{x} = f(x)$$



RITRATTO DI FASE

PUNTI FISSI x^* : $f(x^*) = 0$

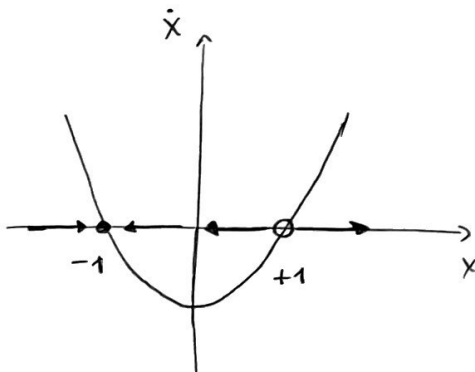
soluzioni di equilibrio: STABILE, le piccole perturbazioni sono smorzate nel tempo

PUNTI FISSI STABILI
(localmente o globalmente)

INSTABILE, le perturbazioni, anche piccole, crescono nel tempo.

PUNTI FISSI INSTABILI

ES. $\dot{x} = x^2 - 1$

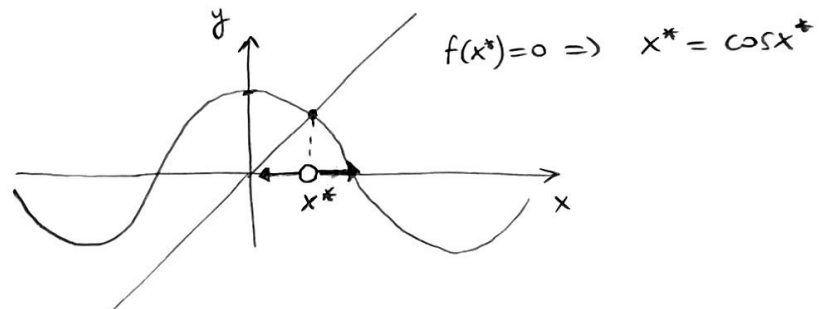


$x^* = -1$ stabile (localmente)

$x^* = +1$ instabile

ES. $\dot{x} = x - \cos x$; $f(x) = x - \cos x$

$y = x$, $y = \cos x$



quando $x > \cos x$ $f(x) > 0$

$x < \cos x$ $f(x) < 0$

$\Rightarrow x^*$ instabile

possiamo classificare la stabilità di x^* senza avere una formula esplicita!

CRESCITA DI UNA POPOLAZIONE

$$\dot{N} = rN, \quad r \text{ tasso di crescita}, \quad N(t) = N_0 e^{rt}$$

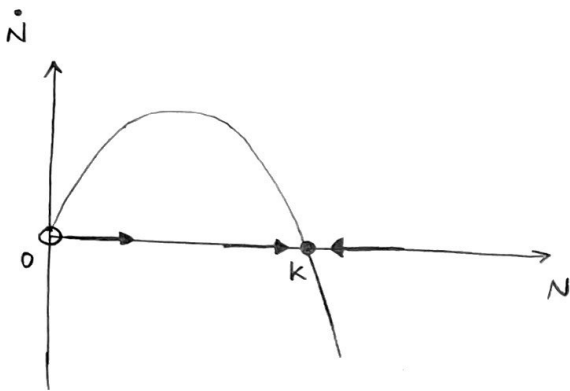
• EQUAZIONE LOGISTICA

$$\dot{N} = rN \left(1 - \frac{N}{K}\right), \quad \text{risultate} \quad \frac{\dot{N}}{N} = r - \frac{r}{K}N$$

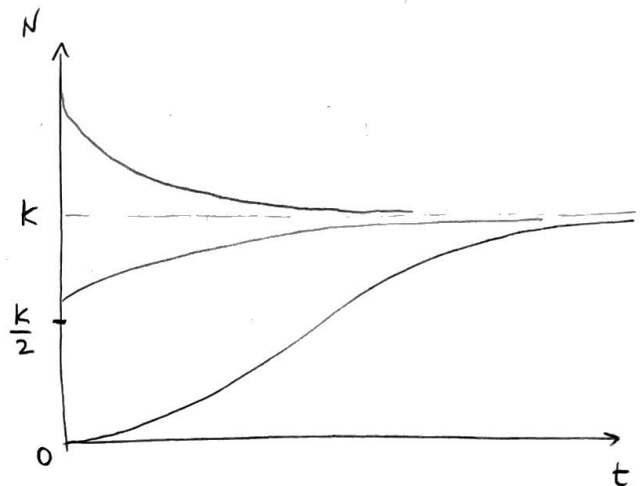
K capiente massima

inizialmente suggerite per descrivere la crescita di una popolazione umana.

Si può risolvere analiticamente, ma noi studiamola come abbiamo imparato



$$\dot{N} = rN - r\frac{N^2}{K}$$



NOTA

L'equazione logistica funziona bene per colture di batteri o altri organismi semplici, ma non funziona per organismi più complessi come ad esempio gli insetti. In questo ultimo caso, dopo una fase iniziale di crescita logistica si osservano grandi oscillazioni persistenti.

ANALISI DI STABILITÀ LINEARE

può misurare la stabilità.

$$\text{ sistema } \dot{x} = f(x)$$

x^* punto fisso

$$y(t) = x(t) - x^* \quad \text{piccole perturbazioni da } x^*$$

$$\frac{dy}{dt} = \dot{y} = \frac{d}{dt}(x - x^*) = \dot{x} \Rightarrow \dot{y} = \dot{x} = f(x) = f(x^* + y)$$

Espandendo in serie di Taylor intorno a x^*

$$f(x^* + y) = f(x^*) + y f'(x^*) + \mathcal{O}(y^2)$$

$$f(x^*) = 0$$

$$\dot{y} = y f'(x^*) + \mathcal{O}(y^2)$$

se $f'(x^*) \neq 0$ e trascurando $\mathcal{O}(y^2)$

$$\dot{y} \approx y f'(x^*)$$

↑

linearizzazione intorno a x^*

$y(t)$ cresce esponenzialmente se $f'(x^*) > 0$ x^* instabile
decade " " se $f'(x^*) < 0$ x^* stabile

se $f'(x^*) = 0$ allora $\mathcal{O}(y^2)$ non sono trascurabili ed è necessaria un'analisi non lineare.

U segue di

$f'(x^*)$ determina la stabilità di x^*

$|f'(x^*)|$ indice QUANTO è stabile x^*

$\frac{1}{|f'(x^*)|}$ è una scala di tempo caratteristica delle variazioni di $x(t)$ intorno a x^*

ES. $\dot{x} = \sin x$

$$f(x) = \sin x = 0 \Rightarrow x^* = k\pi$$

$$f'(x^*) = \cos x^* = \begin{cases} 1 & k \text{ pari} \\ -1 & k \text{ dispari} \end{cases}$$

confronto col grafico in 1.3

serie di Taylor di $f(x)$ intorno a x_0

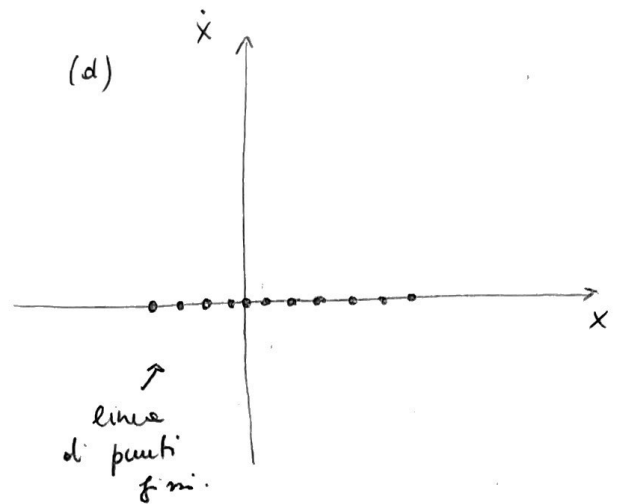
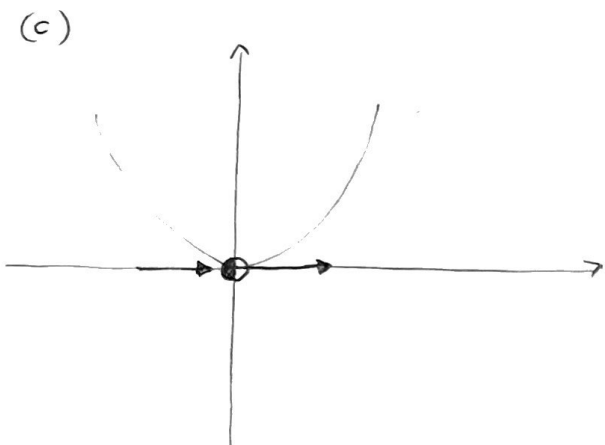
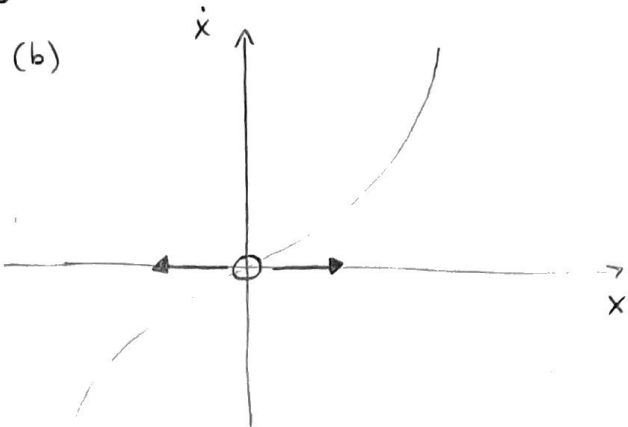
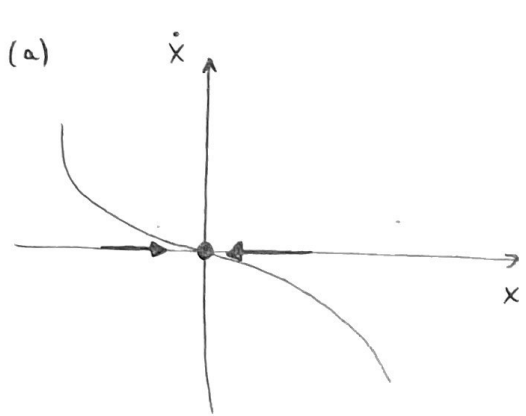
$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!} (x - x_0)^m =$$
$$= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2} (x - x_0)^2 + \dots$$

Per noi $x^* = x_0$ $x^* + y = x$ $y = x - x^*$

ES. E se $f'(x^*)=0$? In generale non si può concludere nulla ma l'analisi deve essere svolta caso per caso.

(a) $\dot{x} = -x^3$ (b) $\dot{x} = x^3$ (c) $\dot{x} = x^2$ (d) $\dot{x} = 0$

$x^* = 0$, $f'(x^*) = 0$ per ognuno



ESISTENZA E UNICITA' (le soluzioni non sono sempre uniche)

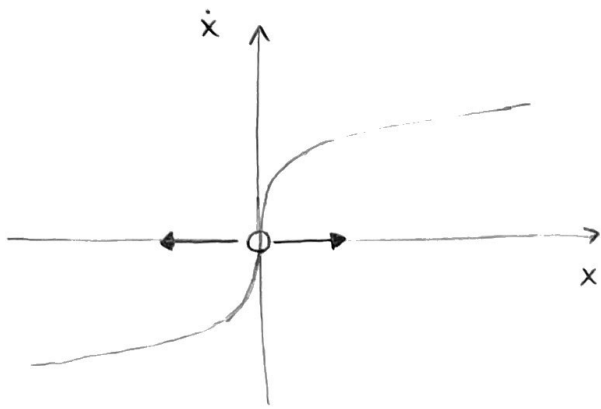
ES. $\dot{x} = x^{1/3}$, $x_0 = 0$

$x = 0$ punto fisso $\Rightarrow x(t) = 0 \quad \forall t$ è soluzione

Allo stesso tempo $\frac{dx}{dt} = x^{1/3}$; $\int \frac{dx}{x^{1/3}} = \int dt$; $\frac{3}{2} x^{2/3} = t + C$

$x(0) = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow x(t) = \left(\frac{2}{3} t\right)^{3/2}$

Poiché la soluzione non è unica, il nostro approccio geometrico fallisce poiché il punto non sa come muoversi.



$x^* = 0$ è molto instabile
poiché $f'(0)$ è infinita.

⇒ TEOREMA DI ESISTENZA E UNICITÀ

$$\dot{x} = f(x), \quad x(0) = x_0$$

$f(x), f'(x)$ continue su un intervallo aperto \mathbb{R} dell'asse x con $x_0 \in \mathbb{R}$.

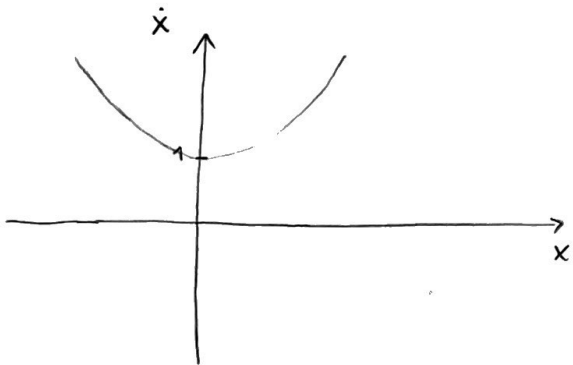
⇒ il problema ha una sola soluzione $x(t)$ per un intervallo di tempo $(-\tau, \tau)$ intorno a $t=0$.

Qualitativamente: se $f(x)$ è sufficientemente liscia le soluzioni esiste ed è unica.

oss. Questo non vuol dire che la soluzione esisterà "per sempre".

ES. $\dot{x} = 1 + x^2, \quad x(0) = x_0$

$$f(x) = 1 + x^2$$



$$f(x), f'(x) \in \mathbb{C} \quad \forall x$$

⇒ soluzioni esistono e sono uniche $\forall x_0$
ma non per tutti i tempi

es.

$$x(0) = 0$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \int dt; \quad \text{Arctan } x = t + C$$

$$x(0) = 0 \Rightarrow C = 0, \quad x(t) = \tan t$$

$$x(t) \text{ esiste solo in } -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$$

perché $\lim_{t \rightarrow \pm \frac{\pi}{2}} x(t) = \pm \infty$

Fuori da questo intervallo non c'è soluzione per il problema con $x_0 = 0$.

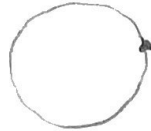
Il sistema ha soluzioni che vanno ad infinito in un tempo finito (esplosivo).

IMPOSSIBILITÀ DELLE OSCILLAZIONI

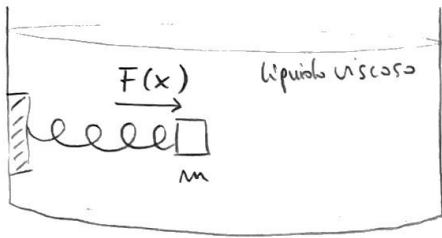
Il punto di fase non cambia mai direzione e, se visto come una soluzione di equilibrio, l'approccio verso di esso è sempre monotono: non ci possono essere oscillazioni in un sistema del 1° ordine.

⇒ Non ci sono soluzioni periodiche al sistema $\dot{x} = f(x)$.

Motivo topologico



Es. $m\ddot{x} + b\dot{x} = F(x)$



$$b\dot{x} \gg m\ddot{x} \Rightarrow b\dot{x} = F(x)$$

$$\dot{x} = \frac{F(x)}{b}$$

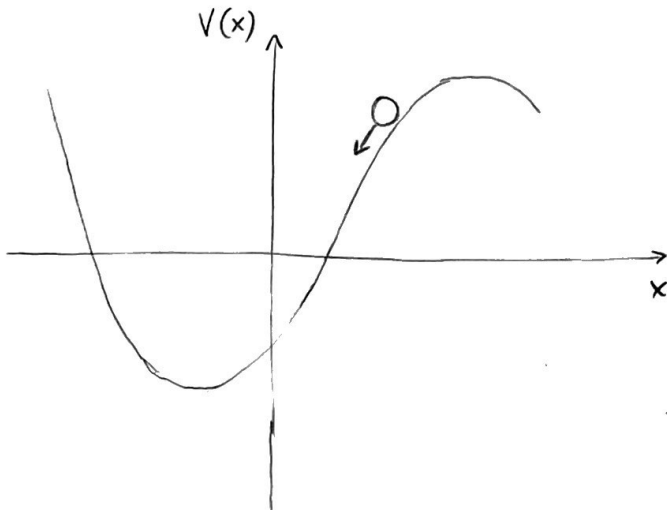
sistema sovrasmorzato

la massa preferisce stare in $x: f(x) = 0$
e $f'(x) < 0$

POTENZIALI

$$f(x) = -\frac{dV}{dx}$$

NOTA: Si tratta sempre di un sistema sovrasmorzato



Consideriamo $V(x(t))$,

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dx} \frac{dx}{dt}$$

$$\dot{x} = -\frac{dV}{dx} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = -\frac{dV}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{dV}{dt} = -\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 \leq 0$$

⇒ $V(t)$ diminuisce lungo le traiettorie, cioè la particella si muove sempre verso le valli del potenziale.

$\frac{dV}{dx} = 0 \Rightarrow$ equilibrio (punti fissi)
 / stabile (minimi di $V(x)$)
 \ instabile (massimi di $V(x)$)

INTEGRAZIONE NUMERICA di $\dot{x} = f(x)$

Metodo di

Euler $x(t_0 + \Delta t) \approx x_1 = x_0 + f(x_0) \Delta t$

... $\Rightarrow x_{n+1} = x_n + f(x_n) \Delta t$

(i vari metodi)

probabilmente non serve descriverli perché fatti in fisica Computazionale.

ESERCIZI PROPOSTI (da fare in gruppo, in particolare per percorsi d'eccellenza) da svolgere a casa o in classe in base al tempo e disposizione

• ANALISI DI STABILITÀ LINEARE

2.4.7 $\dot{x} = ax - x^3$ discutere i casi per $a > 0$, $a < 0$, $a = 0$ anche aiutandosi col metodo grafico.

↳ introdurre la prossima lezione! Dipendenza dei parametri e biforcazioni

• ESISTENZA E UNICITÀ

2.5.5 Esempio generale di non-unicità

$\dot{x} = |x|^{p/q}$ $x(0) = 0$ $p > 0, q > 0$ interi positive senza fattori comuni

a) mostrare che c'è un numero infinito di soluzioni per $x(t)$ se $p < q$

b) mostrare che c'è una soluzione unica se $p > q$

• IMPOSSIBILITÀ DELLE OSCILLAZIONI

2.6.1 Perché un $\ddot{x} = -kx$ oscilla anche se \dot{x} monodimensionale?

• INTEGRAZIONE NUMERICA

Esempio 2.8.1 $\dot{x} = x(1-x)$ equazione logistica con $r=1, k=1$

disegnare il "campo delle pendenze" slope field (gradinate)



mostrare

fig. 2.8.2

e 2.8.3

in diapositive.

Slope field per equazione logistica $\dot{x} = x(1 - x)$

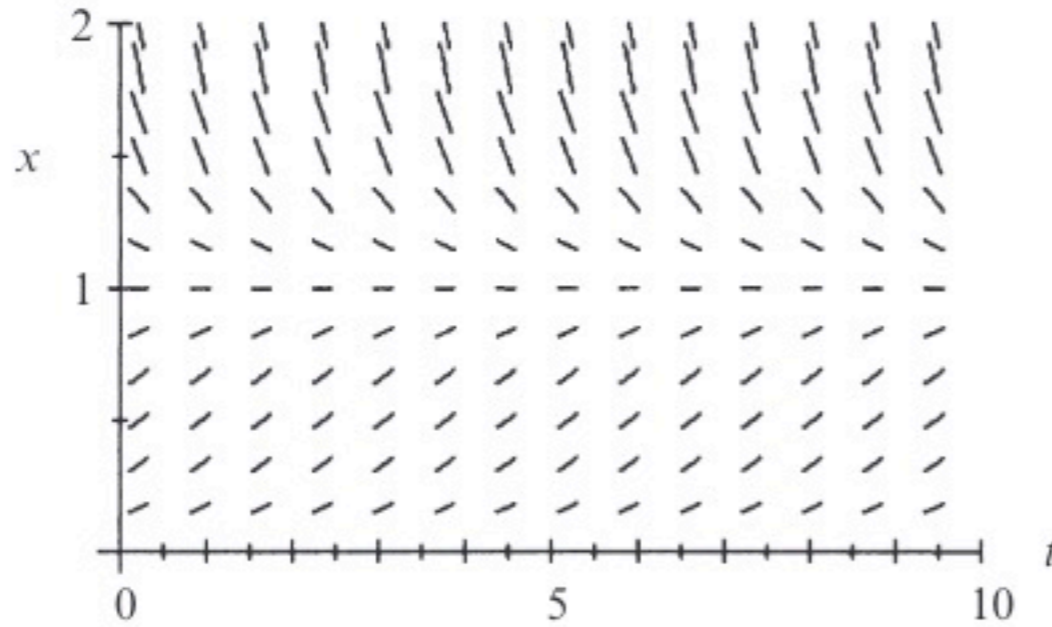


Figure 2.8.2

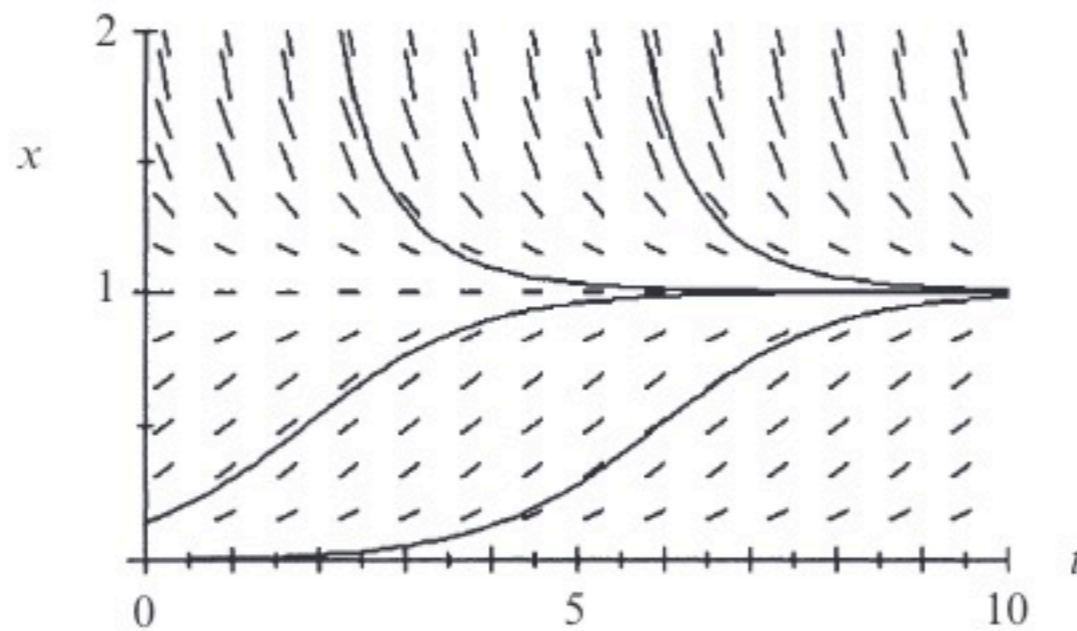


Figure 2.8.3